

修士学位論文

機能分担に基づく多目的最適化手法

指導教授 安田 恵一郎 教授

平成 29 年 2月 17日 提出

首都大学東京大学院

理工学研究科 電気電子工学 専攻

学修番号 15882331

氏 名 森田 聖惇

学位論文要旨（修士（工学））

論文著者名 森田 聖惇

論文題名：機能分担に基づく多目的最適化手法

近年、システムは大規模化・複雑化の傾向にあると同時に、コンピュータパワーの増大やシミュレーション・モデリング等の周辺技術の進歩により、実用的な最適化に対する要求が高まっている。伝統的に、最適化問題は単一目的最適化問題として定式化がなされ、唯一の大域的最適解あるいは準最適解を獲得することが求められてきた。一方、近年では実応用の観点から、単なる最適解の獲得を超えた、意思決定の支援となるような情報を提供するための最適化が求められている。周辺技術を活用した最適化は、多くの解の評価や人間の経験に依存しない解の探索が可能であり、意思決定の支援となることが期待される。

最適化の実応用では、しばしば複数の目的を同時に考慮した最適化を行うことが要求される。このような問題は多目的最適化問題と呼ばれる。多目的最適化では、一般に複数の目的はトレードオフの関係にあるため、最適解は一意に定まらず、「他の解に劣らない解」の集合として存在する。伝統的に、多目的最適化問題はユーザーの選好情報を利用することで単一目的最適化問題に変換され、唯一の最適解が求められてきた。しかし、最適化への要求の高まりから、唯一の解を求めるのではなく、複数かつ多様な解集合の獲得が求められている。複数かつ多様な解集合は、目的間のトレードオフ情報や決定変数と目的の依存関係など、意思決定者の支援となる多くの情報を含んでいることが期待される。

以上の背景から、本論文では発見的近似解法に基づく多目的最適化手法に着目した。発見的近似解法は解情報と評価値情報のみを探索に用いる最適化手法の枠組みであり、シミュレータや実測データを用いた探索が可能である。そのため、急速に発展する最適化の周辺技術を最大限活用できる枠組みとして着目した。また、多くの発見的近似解法は複数の探索点により探索を行う多点探索型手法である。多点探索型の発見的近似解法を多目的最適化へ応用することで、一度の探索で多様な解集合を獲得する方法は、近年大きな注目を集めている。

本論文では、既存の発見的近似解法が構造上の自由度を十分に活用できていない点に着目し、「機能分担」をコンセプトとする新たな探索戦略を提案した。既存の多点探索型発見的近似解法の多くは、探索点を区別することなくすべての探索点を一様に扱う点、および唯一の操作を用いて探索を行う点で共通している。しかし、実際には探索点の状態は探索点ごとに異なるとともに、各操作は利点・欠点を有しており、唯一の操作を用いた探索は性能上の限界が想定さ

れる。一方で、発見的近似解法は構造上の高い自由度を有している。機能分担に基づく探索戦略は(a)探索点の状態の判断・分類, (b)要求に特化した複数の操作の使用, から構成される。この戦略を活用することで、発見的近似解法の自由度を最大限活用した優れた最適化手法の構築が期待できる。

さらに、本論文では機能分担に基づく探索戦略を多目的最適化問題へ応用し、機能分担に基づく多目的最適化手法を提案した。多目的最適化では、優れた意思決定の支援とするために、「収束性」、「多様性」の双方に優れる解集合の獲得が求められる。機能分担に基づく多目的最適化手法は、「収束性の改善」および「多様性の改善」に特化した操作を用いることで、既存の多目的最適化手法が課題とする「収束性」、「多様性」の双方に優れる解集合の獲得を目指す。本論文の要点は以下の通りである。

- (1) 既存の多目的最適化手法の課題点を指摘した。既存の多目的最適化手法を系統的に分類し、各手法の特性を整理した。既存の多目的最適化手法は、解の収束性・多様性の改善のためのアプローチから「優越関係に基づく手法」、「分割に基づく手法」、「Indicator に基づく手法」の3つの系統に分類できることを指摘した。さらに、3つの系統に属する手法はそれぞれが利点・欠点を有していることを指摘した。この利点・欠点により、既存の多目的最適化手法は特定の条件下で探索性能が悪化することを指摘した。
- (2) 機能分担に基づく探索戦略を構築した。既存の最適化手法が発見的近似解法の構造上の自由度を十分に活用していない点に着目し、(a)探索点を一様に扱う必要はない、(b)探索に用いる操作を1つに限定する必要はない、ことを踏まえた「機能分担」に基づく探索戦略を構築した。機能分担に基づく探索戦略では、探索点の状態を評価することで、探索点を区別する。さらに、探索点の状態に応じて複数の操作を使い分けることで、唯一の操作のみを用いる従来の発見的近似解法に比べて効率的な探索を期待する。
- (3) 機能分担に基づく多目的最適化手法を提案した。多目的最適化では、収束性と多様性の双方に優れる解集合の獲得が求められる。機能分担に基づく多目的最適化手法は、優越関係に基づく手法では優れた多様性の改善が可能である点、および分割に基づく手法では優れた収束性の改善が可能である点に着目する。機能分担に基づく多目的最適化手法は、探索点の状態を評価し、探索点ごとに上記の手法のどちらを適用すべきかを判断する。機能分担に基づく多目的最適化手法では、上記2つの手法の利点を活用することで、収束性・一様性の双方に優れる解集合の獲得を期待する。
- (4) 機能分担に基づく多目的最適化手法の探索性能を検証した。優越関係に基づく代表的な手法である SPEA2 および分割に基づく代表的な手法である MOEA/D との数値実験による比較を行い、機能分担に基づく多目的最適化手法が上記2つの手法の利点を合わせ持つこと、および優れた探索性能を有することを示した。

目次

1	序論	1
1.1	本論文の背景と目的	1
1.2	本論文の構成	3
2	多目的最適化問題	5
2.1	多目的最適化問題の概要	5
2.1.1	多目的最適化問題の諸定義	5
2.1.2	多目的最適化に対する要求	7
2.1.3	多数目的最適化	8
2.2	多目的最適化手法の評価指標	8
2.2.1	収束性の評価指標	11
2.2.2	分布の広がり の評価指標	11
2.2.3	分布の一様性の評価指標	12
2.2.4	パレートフロンティアの近似精度の評価指標	13
3	代表的な多目的最適化手法	15
3.1	多目的最適化手法とその分類	15
3.2	優越関係に基づく手法	16
3.3	分割に基づく手法	23
3.4	Indicator に基づく手法	26
3.5	既存手法の課題点	28
3.5.1	優越関係に基づく手法の課題点	28

3.5.2	分割に基づく手法の課題点	29
3.5.3	Indicator に基づく手法の課題点	30
4	機能分担に基づく探索戦略	32
4.1	機能分担	32
4.1.1	機能分担のコンセプト	33
4.1.2	機能分担に関する先行研究	34
4.2	機能分担に基づく多目的最適化手法	34
4.2.1	多目的最適化のための機能分担の方針	35
4.2.2	探索点の状態判断と分類	36
4.2.3	選択操作	36
4.2.4	提案手法のアルゴリズム	38
4.3	数値実験	41
4.3.1	機能分担の影響解析	41
4.3.2	目的数の異なる問題を用いた数値実験	46
4.3.3	無限アーカイブを用いた探索性能の評価	53
5	多目的最適化手法の優良解集合探索への応用	54
5.1	優良解集合探索問題	54
5.1.1	優良解集合探索問題の定式化	55
5.1.2	優良解集合の具体例	57
5.1.3	優良解集合探索問題の性質	60
5.2	優越関係に基づく優良解集合探索	61
5.2.1	優良解集合探索問題への優越関係に基づく手法の適用	61
5.2.2	優越関係に基づく優良解集合探索手法の提案	61
5.3	数値実験	63
5.3.1	実験条件	63
5.3.2	結果と考察	64
6	結論	71
6.1	機能分担に基づく多目的最適化手法のまとめと今後の課題	71

6.2 優越関係に基づく手法による優良解集合探索手法のまとめと今後の課題	73
参考文献	75
謝辞	83
A 多目的最適化の応用研究	84
A.1 2目的最適化問題	84
A.2 3目的最適化問題	85
A.3 4目的以上の最適化問題	85
B 代表的なスカラー化関数	87
B.1 荷重和	87
B.2 重み付けチェビシェフノルム	87
B.3 Penalty-based Boundary Intersection	88
C 本論文で用いたベンチマーク問題	91
C.1 WFG	91
C.2 MED	95
D 実数値 GA のための交叉・突然変異	98
D.1 Simulated Binary Crossover	98
D.2 Polynomial Mutation	98

1

序論

1.1 本論文の背景と目的

人間の意思決定の多くは最適化問題として定式化が可能である。最適化では、目的を最も高い水準で達成するための解を求める。工学分野では電力システム・鉄道システムに代表されるシステムの運用・制御[1, 2]や自動車・航空機などの製品の設計[3, 4]など、最適化問題を解くことで多くの意思決定が行われている。

最適化の周辺技術の発達に伴い最適化問題の定式化や最適化手法に対する要求は変化しており、周辺環境の変化に応じた最適化手法の研究が求められている。近年、システムは大規模化・複雑化の傾向にあると同時に、コンピュータパワーの増大やシミュレーション・モデリング等の最適化の周辺技術が発展している[5]。伝統的に、最適化問題は単一目的最適化問題として定式化がなされ、唯一の大域的最適解あるいは準最適解を獲得することが求められてきた。一方、近年では実応用の観点から、単なる最適解の獲得を超えた、意思決定の支援となるような情報を提供するための最適化が求められている[6]。周辺技術を活用した最適化は、多くの解の評価や人間の経験に依存しない解の探索が可能であり、得られた解（解集合）を分析することにより、意思決定の支援となる情報を得ることが期待される。

最適化の実応用では、しばしば複数の目的を同時に考慮した最適化を行うことが要求される。このような問題は多目的最適化問題[7]と呼ばれる。多目的最適化問題では、一般に複数の目的はトレードオフの関係にあるため、最適解は一意に定まらず、「他の

解に劣らない解」として定義されるパレート解の集合として存在する。伝統的に、多目的最適化問題はユーザーの選好情報を利用することで単一目的最適化問題に変換され、唯一のパレート解が求められてきた。しかし、最適化への要求の高まりから、唯一のパレート解を求めるのではなく、複数かつ多様なパレート解の獲得が求められている。複数かつ多様なパレート解は、目的間のトレードオフ情報や決定変数と目的の依存関係など、意思決定者の支援となる多くの情報を含んでいることが期待される。

以上の背景から、本論文では発見的近似解法[8]に基づく多目的最適化手法に着目する。発見的近似解法は解情報と評価値情報のみを探索に用いる最適化手法の枠組みであり、シミュレータや実測データを用いた探索が可能である。そのため、急速に発展する最適化の周辺技術を最大限活用できる枠組みとして着目する。また、多くの発見的近似解法は複数の探索点により探索を行う多点探索型手法である。多点探索型の発見的近似解法を多目的最適化へ応用することで、一度の探索で多様なパレート解集合を獲得する方法は、近年大きな注目を集めている。意思決定のための知見を獲得するために、多目的最適化手法はパレートフロンティアへの収束（収束性）、パレートフロンティア全域への広がり（広がり）、パレートフロンティア上での一様な分布（一様性）を満たす解集合を求める必要がある。従来は2目的、あるいは3目的の多目的最適化問題を中心に研究が行われてきたが、近年では4目的以上の多目的最適化問題に対する最適化手法が要求されている[9, 10]。

本論文では、既存の発見的近似解法が構造上の自由度を十分に活用できていない点に着目し、「機能分担」をコンセプトとする新たな探索戦略を提案する。既存の多点探索型発見的近似解法の多くは、探索点を区別することなく、すべての探索点を一様に扱う点、および唯一の操作を用いて探索を行う点で共通している。しかし、実際には探索点の状態は探索点ごとに異なるとともに、各操作は利点・欠点を有しており、唯一の操作を用いた探索は性能上の限界が想定される。一方で、発見的近似解法は構造上の高い自由度を有しており、探索点を一様に扱う必要はなく、探索に用いる操作を一つに限定する必然性もない。発見的近似解法の自由度を活用し、機能の異なる複数の操作を適切に使用することで、唯一の操作を用いる最適化手法に比べて優れた探索を行うことが期待できる。機能分担に基づく探索戦略は (a) 探索点の状態の判断・分類, (b) 要求に特化した複数の操作の使用, から構成される。この戦略を活用することで、発見的近似解法の自由度を最大限活用した優れた最適化手法の構築を狙う。

本論文では機能分担に基づく探索戦略を多目的最適化問題へ応用し、機能分担に基づく多目的最適化手法を提案する。多目的最適化では、優れた意思決定の支援とするために、「収束性」、「広がり」、「一様性」のすべてに優れる解集合の獲得が求められる。機能分担に基づく多目的最適化手法は、「収束性の改善」および「一様性の改善」に特化した操作を用いることで、既存の多目的最適化手法が課題とする「収束性」、「一様性」の双方に優れる解集合の獲得を期待する。ベンチマーク問題を用いた数値実験により、提案手法の探索性能を検証する。

また、多目的最適化のみならず、単一目的最適化においても多様な解集合を獲得することに対するニーズが存在する[11]。例えば、多様な解集合を獲得することができれば、事故あるいは技術的課題などに直面した際の代替案の提示、あるいは「見た目の良さ」など定式化が困難な目的を考慮するための選択肢の提示が可能となる。本研究グループでは単一目的最適化問題に立脚した新たな問題として優良解集合探索問題を提案している[12]。単一目的最適化問題では唯一の大域的最適解または準最適解を獲得するのに対して、優良解集合探索問題は多様な局所的最適解の集合を獲得する。これにより、最適解の獲得を超えた実応用で求められるニーズへの対応が期待できる。

優良解集合探索問題は多様な解を獲得する点において多目的最適化問題と類似しており、問題の構造上の類似性を指摘することができれば、多目的最適化の知見を活用した優良解集合探索手法の提案が期待できる。本論文では、優良解集合探索問題が多目的最適化問題の類似の問題として定式化できることを指摘するとともに、多目的最適化における「優越関係に基づく手法」を優良解集合探索問題に適用できることを指摘する。優越関係に基づく手法を活用した最も基本的な優良解集合探索手法を提案し、基礎的な数値実験により、提案手法の優良解集合の探索性能を検証する。

1.2 本論文の構成

本論文は全6章から構成されている。各章の概要を以下に示す。

第1章の“序論”では、本研究の背景と目的を述べる。

第2章の“多目的最適化問題”では、多目的最適化問題の概要と諸定義について述べ

るとともに、多目的最適化によって得られた解集合の評価方法について述べる。

第3章の“代表的な多目的最適化手法”では、進化型多目的最適化手法の概要について述べる。さらに、既存の多目的最適化手法が3つの系統に分類できることを指摘するとともに、それらの手法の課題点をまとめる。

第4章の“機能分担に基づく探索戦略”では、発見的近似解法の構造上の自由度を活用するための機能分担に基づく探索戦略を提案する。さらに、提案する探索戦略に従い、機能分担に基づく多目的最適化手法を提案する。数値実験を行い、機能分担に基づく多目的最適化手法の探索性能を評価する。

第5章の“多目的最適化手法の優良解集合探索への応用”では、優良解集合探索問題が多目的最適化問題の類似の問題として定式化できることを指摘するとともに、多目的最適化手法を優良解集合探索へ応用する。数値実験により、提案手法の探索性能を評価する。

第6章の“結論”では、本研究のまとめと今後の課題を述べる。

2

多目的最適化問題

2.1 多目的最適化問題の概要

人間が意思決定を行う時、その多くは複数の指標を同時に考慮する必要がある。例えば、アパートを選ぶ際は「家賃」、「駅からの距離」、「間取り」など多くの観点から検討を行う。また、製品の設計では「耐久性」、「軽さ」といった相反する基準についてバランスをとる必要がある。このような、複数の目的を同時に考慮して最も良い選択（解の決定）を行う問題は多目的最適化問題として定式化される[7]。以下では、すべての目的関数を最小化する場合について、多目的最適化問題の概要、多目的最適化に対する要求、多数目的最適化、多目的最適化の評価指標について述べる。

2.1.1 多目的最適化問題の諸定義

決定変数ベクトルを $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 実行可能領域を $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ とした時, r 目的の目的関数ベクトル $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})]^T$ を最小化する多目的最適化問題は次のように定式化される。

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})]^T \quad (2.1)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad (2.2)$$

多目的最適化における解の優劣は、優越関係によって判断される。次式を満たす時、解 x は解 y を優越する ($x \prec_p y$)。以下、 $k = 1, 2, \dots, r$ である。

$$x \prec_p y \iff \forall k, f_k(x) \leq f_k(y) \wedge \exists k, f_k(x) < f_k(y) \quad (2.3)$$

多目的最適化における最適解は、他のすべての解に優越されない解であるパレート解として定義される。パレート解は一般に集合として存在し、それらの間に客観的な優劣関係は生じない。パレート解集合 PS は次のように与えられる。

$$PS = \{x \in X | \forall y \in X, y \not\prec x\} \quad (2.4)$$

パレート解集合を目的関数空間上で図示したものはパレートフロンティアと呼ばれる。図 2.1 に多目的最適化における決定変数空間の概略図、図 2.2 に多目的最適化における目的関数空間の概略図を示す。

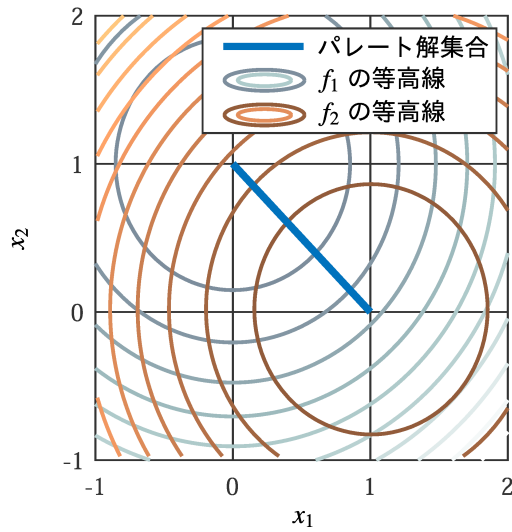


図 2.1 多目的最適化における決定変数空間の概略図 (2つの2次関数によって生成されるパレート解集合)

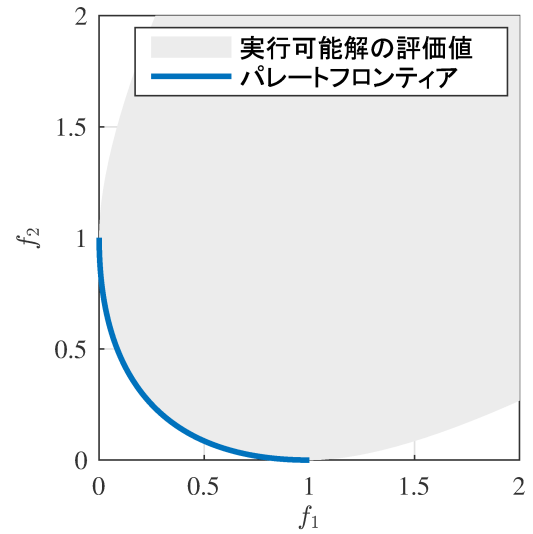


図 2.2 多目的最適化における目的関数空間の概略図 (図 2.1 と対応している)

2.1.2 多目的最適化に対する要求

多目的最適化では、パレート解同士の優劣を客観的に決定できず、一般にパレート解は集合として存在する。この性質から、多目的最適化問題の解法として次の2つのアプローチが考えられる。これらのアプローチはそれぞれが利点を有している。

- (1) 使用者の選好情報を用いることで、選好に応じた唯一のパレート解を求める。伝統的な多目的最適化問題の解法であり、使用者の選好を必要とする。代表的な手法として荷重和[7]、制約変換法[7]などがある。
- (2) パレートフロンティアを近似するような多数のパレート解集合を求める。多点探索型の発見的近似解法を多目的最適化へ応用した手法であり、使用者の選好情報を必要としない。

工学応用の観点からは、「最適解」そのものを求めることに加え、目的間のトレードオフ関係や目的と決定変数の依存関係など「意思決定の支援となる情報」を求めることに對して要求が存在している[6]。(2)の方法では多数のパレート解を求めることから、(2)の方法とデータマイニングなどの知見抽出の技術を組み合わせることで、パレート解集合から意思決定に役立つ知見を抽出し、意思決定へ活用する「意思決定の支援のための多目的最適化」の研究が行われている。例えば、文献[13]では車体構造の軽量化のための知見の抽出を行っており、多数のパレート解を分析することで目的間のトレードオフ関係や重要な決定変数を明らかにしている。文献[14]ではプラントのプロトシステムの設計に多目的最適化を応用し、得られた多数のパレート解を分析することで、設計上のボトルネックとなっている制約条件の検討を行っている。このような「意思決定の支援のための多目的最適化」は多くの注目を集めている[3, 4, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 18]。多目的最適化の応用研究については Appendix A を参照されたい。

以上の背景から、本研究では(2)の方法を対象に研究を行うものとし、以下では(2)の方法を単に多目的最適化と呼ぶ。

2.1.3 多数目的最適化

意思決定のための多目的最適化を実現するためには、パレート解集合を獲得するための多目的最適化手法、およびパレート解集合を分析するための手法が必要となる。近年では従来の2目的、3目的の多目的最適化問題に加え、より多くの目的を有する多目的最適化問題として問題を定式化し、目的間のトレードオフ解析などの意思決定のための知見抽出を行うことが要求されている[4, 6, 18, 19]。しかし、4目的以上の多目的最適化問題を扱う上で、次のような課題が生じることが知られている。

- 多目的最適化手法の課題

後述する「優越関係に基づく多目的最適化手法」では、優越関係による比較を基に探索点の優劣を決定する。しかし、目的数が増加すると互いに非劣な関係になる探索点が増加し、パレートフロンティアへの収束性が低下する。

- 知見の抽出の課題

2目的、3目的の場合は目的関数空間上にパレート解をプロットすることで、目的関数間のトレードオフ関係や解の位置関係がわかる。しかし、4目的以上になると目的関数空間上にプロットすることができなくなるため、トレードオフの把握が困難となる。

このように、多目的最適化問題の目的数の増加が最適化手法および知見の抽出手法へ与える影響は極めて大きい。特に4目的以上の多目的最適化問題は多数目的最適化問題と呼ばれており、近年では多くの研究が行われている。

2.2 多目的最適化手法の評価指標

多目的最適化手法の目標は、パレートフロンティアを近似するような解集合（近似パレート解集合）を獲得することである。探索で得られた近似パレート解集合によるパレートフロンティアの近似精度は、次の3つの観点から評価される。近似パレート解集合の例を図2.3に示す。

- 収束性

獲得した近似パレート解がパレートフロンティアへ十分近づいているか

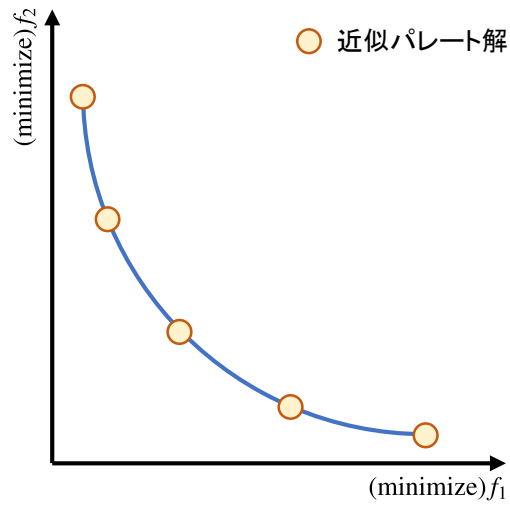
- 分布の広がり

獲得した近似パレート解集合がパレートフロンティア全域に広がっているか

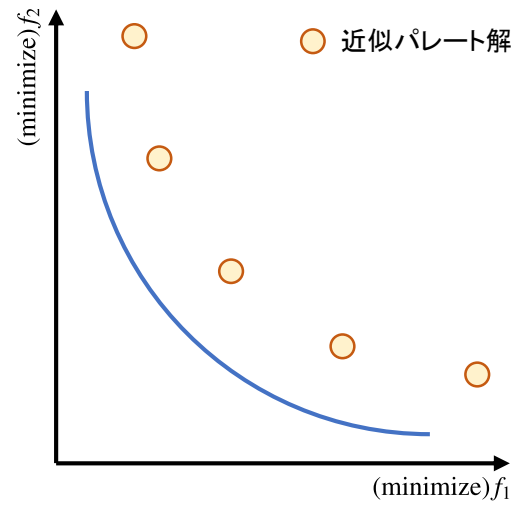
- 分布の一様性

獲得した近似パレート解集合が偏ることなくパレートフロンティア上で一様に分布しているか

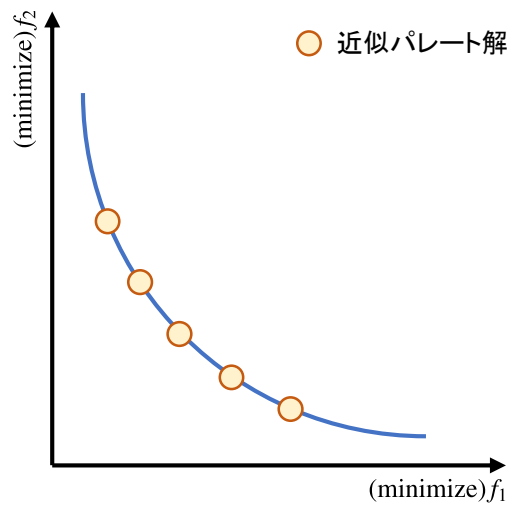
このように、多目的最適化手法の評価はそれ自体が多目的であり、これまで数多くの評価指標が提案されている。ここでは、多目的最適化手法によって得られた近似パレート解集合に対する代表的な評価指標について述べる。



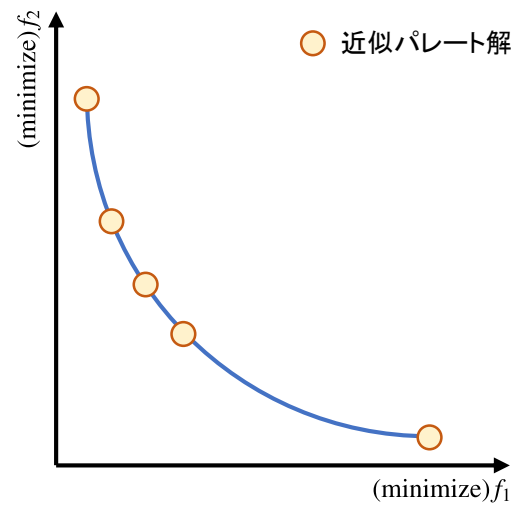
(a) 理想的な近似パレート解集合



(b) 収束性に劣る近似パレート解集合



(c) 広がり性に劣る近似パレート解集合



(d) 一様性に劣る近似パレート解集合

図 2.3 近似パレート解集合の例

2.2.1 収束性の評価指標

Generational Distance

Generational Distance (GD) [20]は近年で最もよく使用される評価指標の1つである。事前に参照する解集合を必要とし、「すべての比較手法によって獲得された近似パレート解集合」、「パレート解となるようランダムに生成した解集合」、「後述する分割に基づく手法が理想的に獲得する解集合」など、様々な方法で生成した解集合が参照解集合とされる。得られた近似パレート解 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ から参照解集合 \mathbf{P}^* までの平均距離として定義される。GD が小さいほど、収束性に優れていると判断する。GD の概略図を図 2.4 に示す。

$$GD = \frac{\sum_{i=1}^{|\mathbf{P}|} c_i}{|\mathbf{P}|} \quad (2.5)$$

$$c_i = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}^*} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \quad (2.6)$$

2.2.2 分布の広がり の評価指標

Maximum Spread

Maximum Spread (MS) [21]は、探索で得られた解集合の極端点を使用して、解集合の広がり を評価する。MS は値が大きいほど得られた解が広範に分布すると判断する。探索で得られた近似パレート解のうち、目的関数 f_k の最小値を f_k^{\min} 、最大値を f_k^{\max} とすると、MS は次式で計算される。MS の概略図を図 2.5 に示す。

$$MS = \sqrt{\sum_{k=1}^r (f_k^{\max} - f_k^{\min})} \quad (2.7)$$

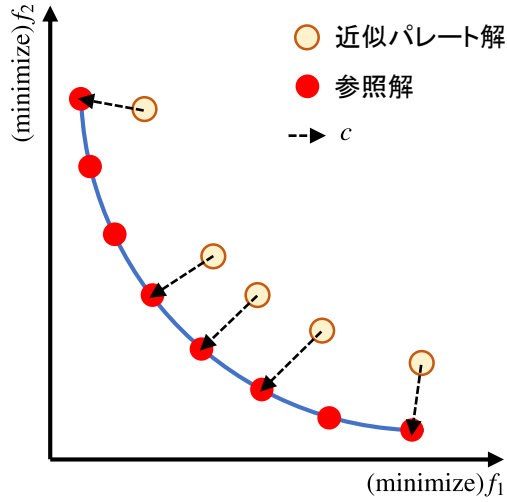


図 2.4 収束性の評価指標である GD の概略図

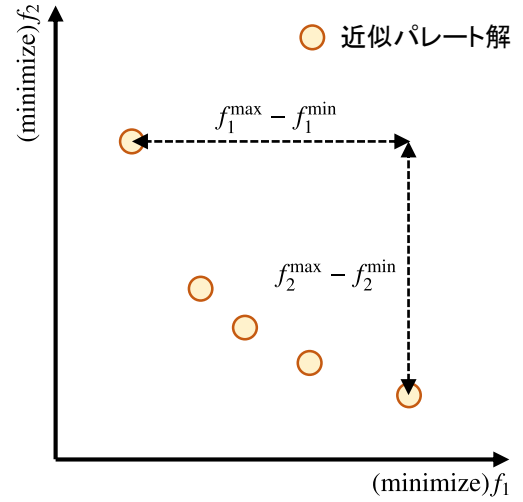


図 2.5 広がり の評価指標である MS の概略図

2.2.3 分布の一様性の評価指標

Cover Ratio

Cover Ratio (CR) [22]は解の広がり と分布の一様性を評価する指標である。CR の計算は次の手順で行われる。まず、各目的関数 f_k 軸の最大値と最小値の間を N 分割する。次に、分割された領域内に解が存在するならば1、さもないと0とする。この合計を N で割った値を cr_k とする。以上をすべての目的関数に対して行い、次式に従い最終的な CR を計算する。CR が大きいほど、分布の一様性に優れると判断する。CR の概略図を図 2.6 に示す。

$$CR = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r cr_k \quad (2.8)$$

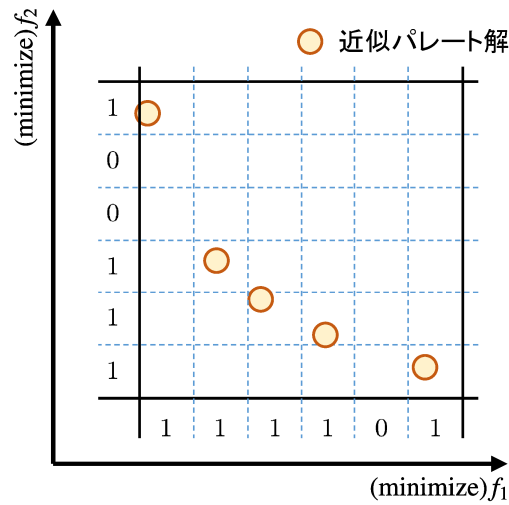


図 2.6 一様性の評価指標である CR の概略図

2.2.4 パレートフロンティアの近似精度の評価指標

Hypervolume

Hypervolume (HV) [23]は参照ベクトルと近似パレート解によって張られる超体積として定義される。収束性・広がり・一様性を同時に評価する。概略図を図 2.7 に示す。HV が大きいほど、パレートフロンティアの近似精度が高いと判断する。

HV は任意の目的数で定義が可能であるが、HV の計算コストは目的数の増加に対して指数関数的に増大することが知られており、高速な HV の計算アルゴリズムの研究が行われている。HV の概略図を図 2.7 に示す。

Inverted Generational Distance

Inverted Generational Distance (IGD) [24] はパレートフロンティアの近似精度を評価する指標であり、参照解 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}^*$ から得られた近似パレート解集合 \mathbf{P} までの平均距離として次式で定義される。IGD が小さいほど、パレートフロンティアの近似精度が高いと判断する。IGD の概略図を図 2.8 に示す。

$$IGD = \frac{\sum_{i=1}^{|P^*|} c_i}{|P^*|} \quad (2.9)$$

$$c_i = \min_{y \in P} \|f(x_i) - f(y)\| \quad (2.10)$$

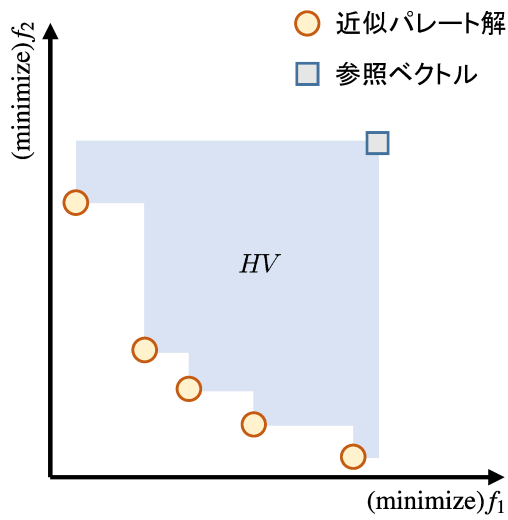


図 2.7 パレートフロンティアの近似精度の評価指標である HV の概略図

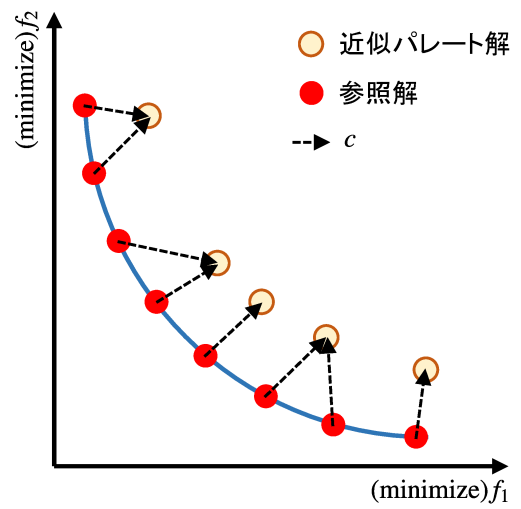


図 2.8 パレートフロンティアの近似精度の評価指標である IGD の概略図

3

代表的な 多目的最適化手法

3.1 多目的最適化手法とその分類

最適化手法の枠組みの一つに発見的近似解法（メタヒューリスティクス）が存在する[8]。発見的近似解法は解情報と評価値情報のみを探索に用いるためシミュレータや実測データを用いた探索が可能，実用的な時間内で実用的な解を得ることが可能，な点から急速に発展する最適化の周辺技術を最大限活用可能な枠組みとしてさらなる研究が求められている。

発見的近似解法の多くは複数の探索点を用いて探索を行う多点探索型最適化手法である。一方，多目的最適化では唯一の解を求めるのではなく，多様な解から構成される解集合を獲得することが要求される。多点探索型の発見的近似解法に対して探索点がそれぞれ異なる解に収束するような機能を埋め込むことができれば，一度の探索で複数の解を同時に獲得することができるため，手法の探索メカニズムと問題の目標の観点から発見的近似解法と多目的最適化の親和性は高いと言える。以上の背景を踏まえ，発見的近似解法を多目的最適化に応用した手法（進化型多目的最適化手法）の研究が盛んに行われている。

以下では，これまでに提案されてきた進化型多目的最適化手法を「優越関係に基づく手法」，「分割に基づく手法」，「Indicatorに基づく手法」に分類し，その特性について議論する。多目的最適化の本質的な難しさは，優れた解を判断し，次世代の解を選ぶ「選択操作」の困難さにあると考える。多目的最適化では，優越関係が完全順序関係で

はなく比較不能な場合を許容していることに対して、解の優劣を決定付ける必要がある。上記3つの手法では、それぞれが異なる基準を用いて解の優劣を判断している。

3.2 優越関係に基づく手法

優越関係に基づく手法 (Dominance-based approach) について述べる。優越関係に基づく手法では、他の探索点に優越されていない探索点を優先的に次世代の探索点として選択することで、パレートフロンティアへ探索点を収束させる。例えば、代表的な優越関係に基づく探索点の順位付け操作である Non-dominated Sorting [25] では、他の解に優越されない解ほど高い順位が与えられるように、非劣な度合いに応じて解集合を階層的に順位付けする。Non-dominated Sorting の概略図を図 3.1, Non-dominated Sorting のアルゴリズムを Algorithm 3.1 に示す。これにより、高い順位 (*rank*) を与えられた解はパレートフロンティアに近いと判断できるため、順位に応じた選択を行うことでパレートフロンティアへの収束を実現できる。また、優越関係によって差が生じない解の比較は多様性維持への貢献度に基づき行う。この操作により、収束性と多様性の双方に優れた解集合の獲得を期待する。

優越関係に基づく手法は、収束性の改善を優越関係に依存するため、探索点同士の優越関係が生じない状況下では収束性を失うことが知られている。すなわち、探索終盤のすべての探索点が非劣な関係となった時や、目的数が増加することで探索点同士の優越関係が生じづらい状況下では、探索性能が著しく低下する[10]。一方で、一様性の改善を探索点間の距離に基づき行うため、パレートフロンティアの形状に依存することなく、パレートフロンティア全域のパレート解を求めることが可能である。

以下では、優越関係に基づく代表的な手法として、NSGA-II [25] および SPEA2 [26] について述べる。

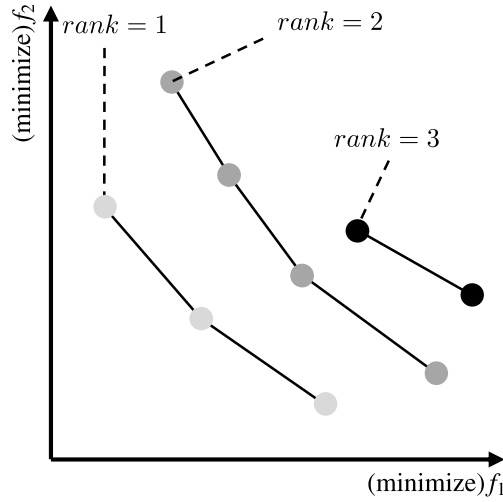


図 3.1 Non-dominated Sorting の概略図

Algorithm 3.1: Non-dominated Sorting

```

1: procedure NON-DOMINATED SORTING(解集合  $P$ )
2:    $x_i \in P$  に対する順位を  $rank_i$  とする。
3:    $r = 1$  とする。                                     ▷ 順位の初期化
4:   while 順位未割り当ての個体が存在する do
5:      $F_r = \{x \in P \mid \forall y \in P, y \not\prec_p x\}$            ▷  $P$  中の他の解に優越されない解の集合
6:      $x_r \in F_r$  に対して  $rank_r = r$  を割り当てる。
7:      $P := P \setminus F_r$                                    ▷ 順位を割り当てられた解を除外
8:      $r := r + 1$                                          ▷ 順位の加算
9:   end while
10:  return すべての解に対する  $rank$ 
11: end procedure

```

NSGA-II

Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) は Deb らによって提案された、優越関係に基づく進化型多目的最適化手法である。Non-dominated Sorting による優越関係の取り入れと、Crowding Distance により多様性を考慮することで、収束性と多様性に優れた解集合の獲得を狙う。エリート保存戦略が用いられられており、選択操作

において確定論的に上位個体を次世代へと残す。NSGA-IIのアルゴリズムを Algorithm 3.2 に示す。

Non-dominated Sorting は優越関係に基づく順位付けの操作である。同じ順位の解同士は非劣な関係となる特徴があり、様々な多目的最適化手法で用いられている。以下、Non-dominated Sorting によって与えられる順位を $rank$ と表現し、 $rank$ の小さい解ほど優れると判断する。 $rank$ が小さいほど自身を優越する他の探索点が少ないと考えられるため、 $rank$ の小さな解ほどパレートフロンティアに近い、すなわち収束性に優れると判断できる。Crowding Distance は次元ごとに隣り合う解までの距離の総和として与えられる。Crowding Distance の概略図を図 3.2 に示す。解集合 \mathbf{P} 中の解 \mathbf{x}_i において、目的関数 f_k 軸上で隣接した解の評価値を $f_k^+(\mathbf{x}_i), f_k^-(\mathbf{x}_i)$ とすると、Crowding Distance は次式で与えられる。

$$cd_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^r (f_k^+(\mathbf{x}_i) - f_k^-(\mathbf{x}_i)) & \text{otherwise} \\ \infty & \exists k, f_k(\mathbf{x}_i) = \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} f_k(\mathbf{y}) \vee f_k(\mathbf{x}_i) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} f_k(\mathbf{y}) \end{cases} \quad (3.1)$$

以下、Crowding Distance を cd と表現し、 cd が大きいほど優れると判断する。 cd が大きいほど周囲の探索点から離れた位置にいると考えられるため、 cd の大きな解は多様性維持への貢献度が高いと判断できる。

NSGA-II では、解の比較は Crowded-comparison Operator (\prec_n) によって行われる。 $\mathbf{x}_1 \prec_n \mathbf{x}_2$ を満たすとき、 \mathbf{x}_1 は \mathbf{x}_2 より優れると判断する。

$$\mathbf{x}_1 \prec_n \mathbf{x}_2 \iff rank_1 < rank_2 \vee (rank_1 = rank_2 \wedge cd_1 > cd_2) \quad (3.2)$$

$rank$ によって差が生じる場合は $rank$ の優れる解が選択され、 $rank$ が等しい場合には cd の優れる解が選択される。この操作により、収束性に差が生じる場合は収束性に優れる解が優先される。収束性に差が生じない解の比較は多様性維持への貢献度に基づき行われる。

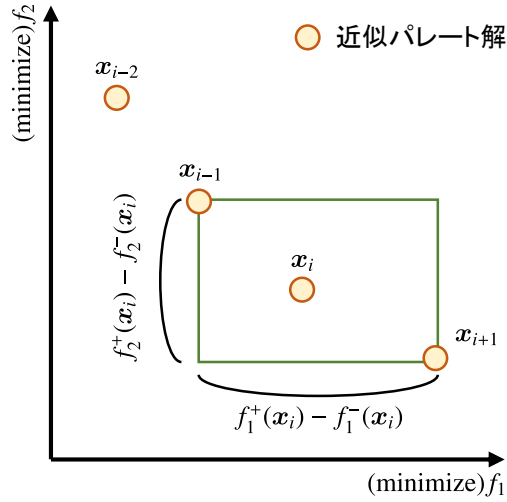


図 3.2 Crowding Distance の概略図

Algorithm 3.2: NSGA-II

Step 0: 初期化

- 1: 初期個体集団 P^0 を与える ($|P^0| = m$).
- 2: 世代数 $G = 0$ とする。

Step 1: rank, 混雑距離の割り当て

- 3: $\forall x_i \in P^G$ に Non-dominated Sorting で $rank_i$ を割り当てる。
- 4: $\forall x_i \in P^G$ に Crowding Distance cd_i を割り当てる。

Step 2: 子の生成

- 5: 子個体集合を $Q^G = \emptyset$ とする。
- 6: **for** $i = 1, \dots, \frac{m}{2}$ **do**
- 7: バイナリトーナメントで親 $x_a, x_b \in P^G$ を選択する。 ▷ Algorithm 3.3 を参照
- 8: 交叉, 突然変異により x_a, x_b から子個体 y_a, y_b を生成する。
- 9: y_a, y_b を Q^G に加える。
- 10: **end for**

Step 3: 選択

- 11: $R^G = P^G \cup Q^G$ とする。
- 12: $\forall x_i \in R^G$ に Non-dominated Sorting で $rank_i$ を割り当てる。
- 13: $\forall x_i \in R^G$ に Crowding Distance cd_i を割り当てる。
- 14: Crowded-comparison Operator に従い R^G 中の上位 m 個体を P^{G+1} とする。

Step 4: 終了判定

- 15: **if** $G < G_{\max}$ **then**
- 16: $G := G + 1$ として Step 1 へ戻る。
- 17: **end if**

Algorithm 3.3: Binary Tournament Selection

```

1: procedure BINARY TOURNAMENT SELECTION(解集合  $P$ )
2:   ランダムに解番号  $a, b$  を選択する。  $\triangleright x_a, x_b \in P$ 
3:   if  $x_a \prec x_b$  then  $\triangleright$  2つの解を比較して優れた解を選択
4:      $y = x_a$ 
5:   else
6:      $y = x_b$ 
7:   end if
8:   return 解  $y$ 
9: end procedure

```

SPEA2

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2) は, Zitzler らによって提案された進化型多目的最適化手法である。NSGA-II と同様に優越関係と距離に基づく探索を行う。アーカイブと呼ばれる外部個体群に優良個体を保存し, 交叉にも外部個体群を利用する。NSGA-II では Crowding Distance により疎な解を優先的に選択するのに対し, SPEA2 では Clustering により密な解を削除することで一様性に優れた解集合の選択を実現している。SPEA2 のアルゴリズムを Algorithm 3.4 に示す。

以下では, 探索点集合を P , アーカイブ個体群を \bar{P} として SPEA2 の適合度の計算について説明する。まず, 集合 $Q = P \cup \bar{P}$ に対して優越関係と解相互の距離を用いて適合度を与える。優越関係に基づく適合度として, 自身を優越する他の解の数を強度 $S(x)$ として与える。以下, $x \in Q, Y = \{y \in Q | y \prec x\}$ である。

$$S(x) = |Y| \quad (3.3)$$

次に, 適合度 $R(x)$ を与える。

$$R(x) = \sum_{y \in Y} S(y) \quad (3.4)$$

$R(x)$ は小さいほど優れた解であることを示し, $R(x) = 0$ であれば x は Q のいずれの解にも優越されないことを示す。

最後に、解相互の距離に基づく適合度を計算する。 \mathbf{Q} に属するすべての解同士の距離を計算し、 \mathbf{x} から k 番目に近い解までの距離を $\sigma_{\mathbf{x}}^k$ とする。ここで、 $k = \sqrt{|\mathbf{P} \cup \bar{\mathbf{P}}|}$ である。距離に基づく適合度 $D(\mathbf{x})$ を次のように与える。

$$D(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{x}}^k + 2} \quad (3.5)$$

最後に、優越関係に基づく適合度と距離に基づく適合度から、最終的な適合度 $F(\mathbf{x})$ を求める。

$$F(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + D(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

Algorithm 3.4: SPEA2

Step 0: 初期化

- 1: 初期個体集団 P^0 を与える ($|P^0| = m$)。
- 2: アーカイブを $\bar{P}^0 = \emptyset$ とする。
- 3: $G=0$ とする。

Step 1: 適合度の割り当て

- 4: $Q^G = P^G \cup \bar{P}^G$ とする。
- 5: 式 (3.3) から (3.6) によってすべての $x \in Q^G$ に適合度 $F(x)$ を割り当てる。

Step 2: 環境選択

- 6: Q^G 中の他の解に優越されない解を \bar{P}^{G+1} とする。
- 7: **if** $|\bar{P}^{G+1}| > m$ **then**
- 8: クラスタリングにより $|\bar{P}^{G+1}| = m$ となるよう解を削減する。
- 9: **else**
- 10: $|\bar{P}^{G+1}| = m$ となるまで Q^G の中から適合度 $F(x)$ の上位を \bar{P}^{G+1} に加える。
- 11: **end if**

Step 3: 終了判定

- 12: **if** $G \geq G_{\max}$ **then**
- 13: 探索を終了する。
- 14: **end if**

Step 4: 子の生成

- 15: 子個体集合を $P^{G+1} = \emptyset$ とする。
- 16: **for** $i = 1, \dots, \frac{m}{2}$ **do**
- 17: バイナリトーナメントで親 x_a, x_b を選択する。 ▷ Algorithm 3.3 を参照
- 18: 交叉, 突然変異により x_a, x_b から子個体 y_a, y_b を生成する。
- 19: y_a, y_b を P^{G+1} に加える。
- 20: **end for**
- 21: $G := G + 1$ として Step 1 へ戻る。

22: procedure CLUSTERING(\bar{P}, m)

- 23: すべての解同士の距離を計算する。
 - 24: **while** $|\bar{P}| > m$ **do**
 - 25: 最も隣接した2つの解を $x_1, x_2 \in \bar{P}$ とする。
 - 26: x_1, x_2 のうち, 2番目に近い解までの距離が短いほうを削除する。
 - 27: **end while**
 - 28: **return** \bar{P}
 - 29: **end procedure**
-

3.3 分割に基づく手法

分割に基づく手法 (Decomposition-based approach) について述べる。分割に基づく手法では、スカラー化関数と重みベクトル集合を用いることで、多目的最適化問題を複数の単一目的最適化問題の集合と捉えて探索を行う。スカラー化関数としては荷重和 [7] や重み付けチェビシェフノルム [27], Penalty-based Boundary Intersection (PBI) [28] が主に用いられる。

重みベクトル集合を $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ とする。ここで、各重みベクトルは $\sum_{j=1}^r w_j = 1, \forall j, w_j \geq 0$ を満たす。スカラー化関数を $S(\mathbf{f}|\mathbf{w}, \mathbf{z})$ とする。 \mathbf{z} はスカラー化関数を用いる際の基準となる点であり、スカラー化関数に応じて理想点 (Ideal Point) あるいは最悪点 (Nadir Point) を指定する。例えば、代表的なスカラー化関数である重み付けチェビシェフノルムでは、重みベクトル $\mathbf{w} = [0.6 \ 0.4]$ に対して図 3.3 のように対応するパレート解を獲得できる。

分割に基づくアプローチでは、重みベクトル集合によって多目的最適化問題を複数の単一目的最適化問題に分割し、それぞれの単一目的最適化問題を解くことで優れた近似パレート解集合を獲得する。2 目的最適化問題における重みベクトルおよび分割に基づく手法で獲得されるパレート解を図 3.4 に示す。このように、分割に基づくアプローチでは重みベクトルに対応するパレート解を複数獲得することで、パレートフロンティアを近似する。PBI を用いた分割に基づくアプローチは $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面を理想としており、図 3.5 のように、理想的なパレートフロンティアを有する問題に対して一様な近似パレート解集合を獲得することができる。スカラー化関数の詳細は Appendix B を参照されたい。

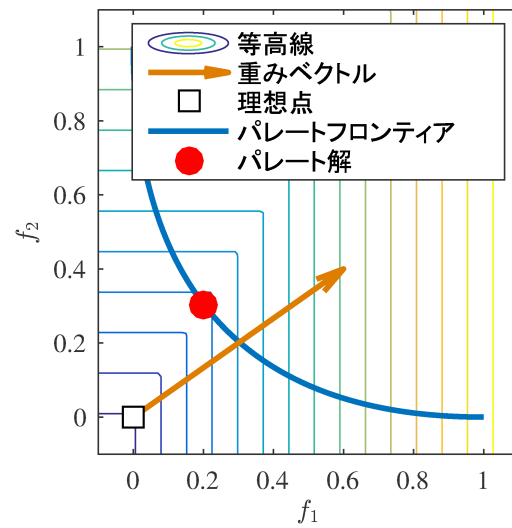


図 3.3 重み付けチェビシェフノルムによって獲得されるパレート解

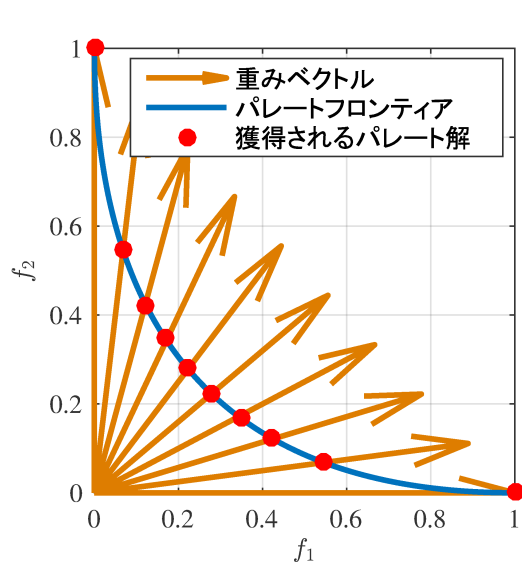


図 3.4 2 目的最適化問題における分割に基づく手法によって獲得されるパレート解集合（スカラー化関数として重み付けチェビシェフノルムを使用）

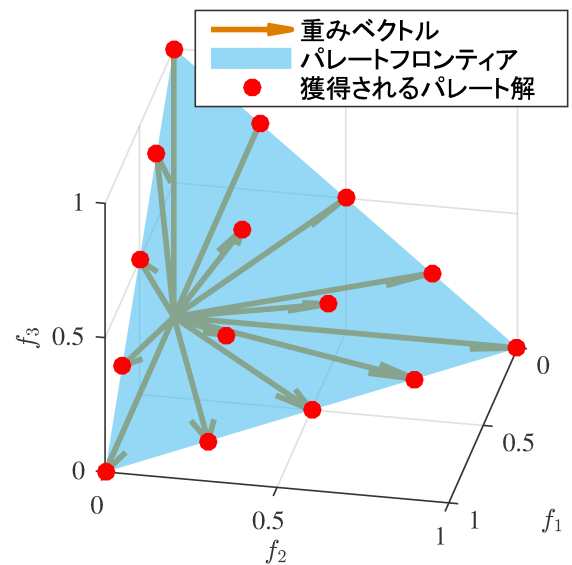


図 3.5 3 目的最適化問題における分割に基づく手法によって獲得される解集合（スカラー化関数として PBI を使用）

MOEA/D

MOEA/D (Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition) [28]は分割に基づく進化型多目的最適化手法である。近接する T 個の重みベクトルを「近傍」と定め、近傍内での遺伝的操作および更新が行われる。任意のスカラー化関数が使用可能である。MOEA/D のアルゴリズムを Algorithm 3.5 に示す。

Algorithm 3.5: MOEA/D

Step 1: 初期化

- 1: 近傍数 T , 初期個体集団 P^0 , 重みベクトル集合 \mathbf{W} を与える ($|P^0| = |\mathbf{W}| = m$)。
- 2: 各個体 $\mathbf{x}_i \in P^0$ に重みベクトル $\mathbf{w}_i \in \mathbf{W}$ を割り当てる。
- 3: 理想点 \mathbf{z} を求める。ここで, $z_k = \min_{i=1,2,\dots,m} f_k(\mathbf{x}_i)$ である。
- 4: 世代数 $G = 0$ とする。

Step 2: 近傍の割り当て

- 5: **for** $i = 1, \dots, m$ **do**
- 6: 重みベクトル間の距離 $\|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j\|$ ($j = 1, 2, \dots, m$) を計算する。
- 7: \mathbf{w}_i と距離の近い T 個の重みベクトル $\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \dots, \mathbf{w}_{i_T}$ に対して, i 番目の個体の近傍を $B(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}$ とする。
- 8: **end for**

Step 3: 子個体の生成と更新

- 9: **for** $i = 1 \dots m$ **do**
- 10: 2つの個体番号 $a, b \in B(i)$ をランダムに選ぶ。
- 11: 個体 $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b$ に対して交叉・突然変異を行い, 子個体 \mathbf{y} を生成する。
- 12: 理想点 \mathbf{z} を更新する。ここで, $z_k := \min\{z_k, f_k(\mathbf{y})\}$ である。
- 13: **for** $j \in B(i)$ **do**
- 14: **if** $S(\mathbf{y}|\mathbf{w}_j, \mathbf{z}) \leq S(\mathbf{x}_j|\mathbf{w}_j, \mathbf{z})$ **then** ▷ スカラー化関数 S を用いて優劣を判断
- 15: $\mathbf{x}_j := \mathbf{y}$ として更新する。
- 16: **end if**
- 17: **end for**
- 18: **end for**

Step 4: 終了判定

- 19: **if** $G < G_{\max}$ **then**
 - 20: $G := G + 1$ として Step 3 へ戻る。
 - 21: **end if**
-

3.4 Indicator に基づく手法

Indicator に基づく手法[29]では、探索点集合によるパレートフロンティアの近似精度を直接評価することで、探索点集合によるパレートフロンティアの近似精度を最大化するように探索を行う。探索点集合を評価するための Indicator Function として、しばしば Hypervolume が用いられる。Hypervolume は優越関係を保存可能であり、収束性・広がり・一様性のすべてを複合した評価が可能なことから、Hypervolume を用いた Indicator に基づく手法が複数提案されている。

SMS-EMOA

\mathcal{S} metric selection EMOA (SMS-EMOA) [30]は、Hypervolume を用いた代表的な Indicator に基づく多目的最適化手法である（Hypervolume は別名 \mathcal{S} metric と呼ばれる）。SMS-EMOA では次世代の探索点の選択基準として、「Hypervolume への貢献度」を用いる。つまり、「その探索点が存在しなかった場合、Hypervolume がどれだけ低下するか」を評価する。HV への貢献度の概略図を図 3.6 に示す。SMS-EMOA のアルゴリズムを Algorithm 3.6 に示す。

SMS-EMOA では、毎世代に 1 個の子個体が生成されて探索点集合に加えられ、最も劣る探索点を 1 つ淘汰する。SMS-EMOA の選択操作では、まず、Non-dominated Sorting によりすべての探索点に *rank* を与える。次に、最も *rank* に劣る解集合に着目し、HV への貢献度を適合度として割り当てる。HV への貢献度が最も小さな探索点を淘汰する。

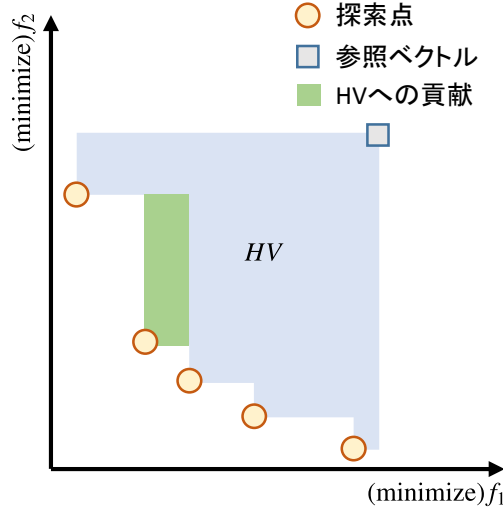


図 3.6 HV への貢献度の概略図

Algorithm 3.6: SMS-EMOA

Step 0: 初期化

- 1: 初期個体集団 P^0 を与える ($|P^0| = m$).
- 2: 世代数 $G = 0$ とする。

Step 1: 子個体の生成

- 3: P^G からランダムに 2 つの親個体 $x_a, x_b \in P^G$ を選択する。
- 4: x_a, x_b に対して交叉・突然変異を行い 1 つの子個体 y を生成する。

Step 2: 選択

- 5: $P^{G+1} = P^G \cup \{y\}$ とする。
- 6: P^{G+1} の個体に対して NON-DOMINATED SORTING で $rank$ を割り当てる。
- 7: 最も $rank$ の劣る個体集合 $Q \subseteq P^{G+1}$ に対して Hypervolume に対する貢献度を割り当てる。
- 8: 最も Hypervolume に対する貢献度の劣る個体 $q \in Q$ を P^{G+1} から削除する。

Step 3: 終了判定

- 9: **if** $G < G_{\max}$ **then**
- 10: $G := G + 1$ として Step 1 へ戻る。
- 11: **end if**

3.5 既存手法の課題点

これまで述べてきた3つの系統は、それぞれが明確な利点・欠点を有している。以下では、各系統の手法の課題点を指摘する。

3.5.1 優越関係に基づく手法の課題点

優越関係に基づく手法では、パレートフロンティアへの収束に探索点同士の優越関係を利用し、探索点中の多様性の維持に探索点同士の距離を利用する。次世代の探索点の選択では、探索点集合中の「非優越の度合い」を優越関係に基づき評価する（NSGA-IIではNon-dominated Sorting, SPEA2では適合度計算の過程で用いる $R(\mathbf{x})$ ）。そして、「非優越の度合い」が優れる解から優先的に選択を行い、「非優越の度合い」で比較ができない解同士の比較を「多様性維持への貢献度」によって行う（NSGA-IIではCrowding Distance, SPEA2では適合度計算の過程で用いる $D(\mathbf{x})$ ）。以上の操作により、優越関係に基づくアプローチでは、探索点中の優越関係が比較的明瞭な状況下では優越関係に基づく収束性の改善、そうでなければ距離に基づく多様性の改善、を行う。

優越関係が成立する領域は目的数によって大きく変化する。目的関数空間上で解 \mathbf{x} の近傍 $N = \{g | \max_k (|f_k(\mathbf{x}) - g_k|) < \varepsilon\}$ を考える（図3.7）。近傍 N において、 \mathbf{x} を優越する領域の超体積を V_1 、 \mathbf{x} に優越される領域の超体積を V_2 、 \mathbf{x} と優越関係の生じない領域の超体積を V_3 とすると、以下のように表される。

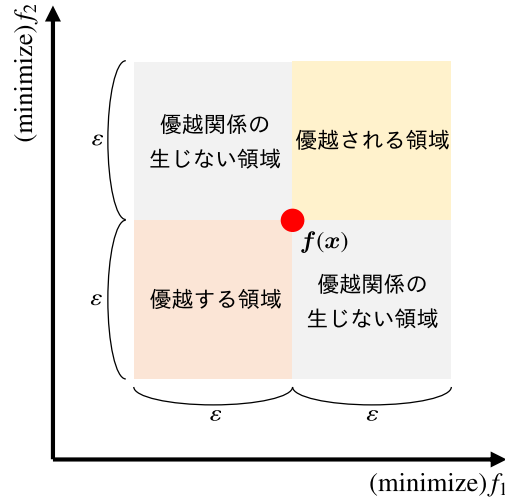
$$V_1 = V_2 = \varepsilon^r \quad (3.7)$$

$$V_3 = (2\varepsilon)^r - 2\varepsilon^r = (2^r - 2)\varepsilon^r \quad (3.8)$$

ここで、 V_1 、 V_2 、 V_3 の比は次のように与えられる。

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 1 : 2^r - 2 \quad (3.9)$$

つまり、目的数 r の増加に伴い、優越関係の生じない領域 V_3 の割合が指数関数的に増加する。これは、目的数の増加に伴い探索点同士の優越関係が成立しにくくなることを意味している。

図 3.7 解 x の近傍領域の概略図

優越関係に基づく手法は探索点間の優越関係が生じない状況下ではパレートフロンティアへの選択圧を失うため、目的数の増加に対してパレートフロンティアへの収束が困難となる[10]。また、比較的小さな目的数でも探索が進行すると探索点の多くが非優越の関係となるため、局所探索性能に劣るといえる。

3.5.2 分割に基づく手法の課題点

分割に基づく手法では、パレートフロンティアへの収束にスカラー化関数を用いたスカラー化適合度を利用し、多様性の維持は重みベクトルの分布によって行われる。

分割に基づく手法では多くの場合、パレートフロンティアの形状に依存せず同一の重みベクトル集合を用いる。PBIを用いた手法やNSGA-III[31]では $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面を理想的なパレートフロンティアとして想定しており、 $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面に対しては優れた収束性と多様性を有する解集合の獲得が可能である。しかし、 $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面は、3目的以上の条件では以下の理由から実問題としては想定することが困難であることが指摘されている[32](図3.8)。

- $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面は、各目的関数に対して無数の大域的最適解を有する。

- $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面は、 $r - 1$ 個の目的関数を同時に最適化できる。

1つ目の特徴は、明らかに最適化問題として一般的ではない。2つ目の特徴は、多目的最適化における「複数の目的関数を同時に最適化できない」という前提を覆す特徴であり、一般的であるとは言えない。

一方、上記とは異なる形状のパレートフロンティアに対しては得られる解集合の一樣性が低下することが知られている。例えば、3つの2次関数から構成される3目的最適化問題を想定すると、 $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ とは異なる形状のパレートフロンティアが形成される (図 3.9)。さらに、制約条件などで実行不可能な領域が存在する場合にも、分割に基づく手法では実行不可能な解を目指して探索する探索点が存在することとなり、得られる解の多様性の悪化、探索の非効率化を引き起こす可能性がある[33](図 3.10)。

3.5.3 Indicator に基づく手法の課題点

Indicator に基づく手法では、しばしば Indicator として Hypervolume (HV) が用いられる。Hypervolume は「収束性」、「一樣性」、「広がり」のすべてを評価可能であり、有用性の高い指標であることから、高速な HV の計算アルゴリズムの研究が行われている。しかしながら、HV の計算コストは探索点数および目的数の増加に応じて急激に増加することが知られている。例えば、Fonseca のアルゴリズム[34]によれば、個体数 m 、目的数 r に対して最悪ケースで $O(m^{r-2} \log m)$ を必要とする。さらに、例えば SMS-EMOA では1個の解の評価に対して、 $m + 2$ 回の HV の計算が必要となる。

Indicator に基づく手法では計算コストの面で他のアプローチに劣るとともに、目的数が増加すると計算コストの観点から使用が困難になる。Indicator に基づく手法が使用できるのは比較的小規模な探索点数を用いて比較的低い目的数の問題を解く場合に限定される。

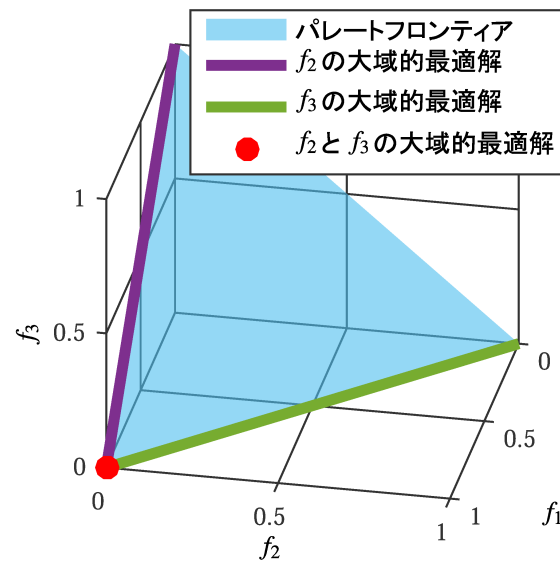


図 3.8 $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面のパレートフロンティアの概略図

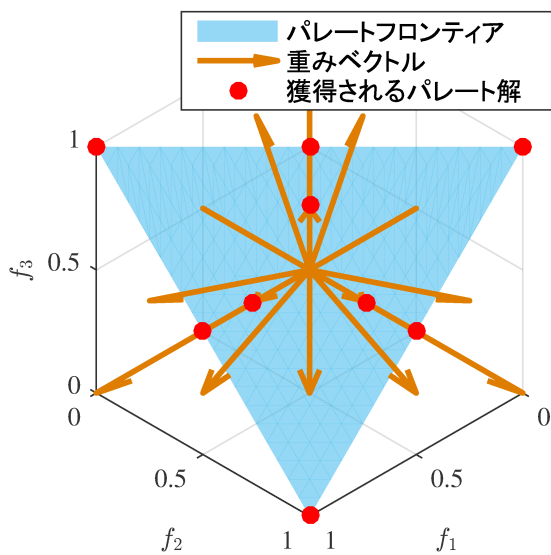


図 3.9 3つの2次関数によって形成されるパレートフロンティアと分割に基づくアプローチによって獲得されるパレート解集合

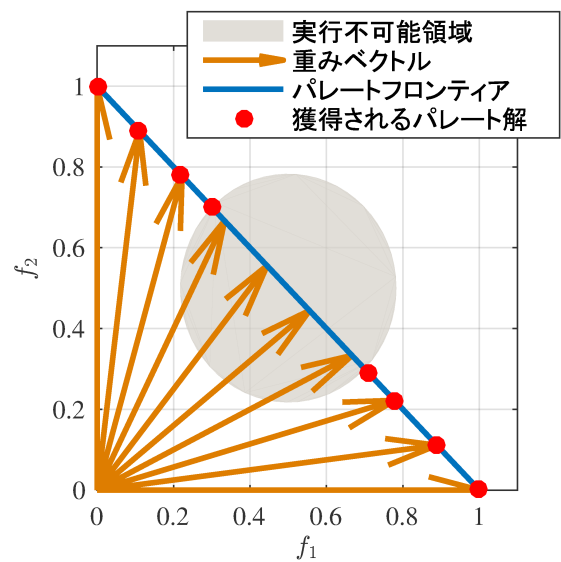


図 3.10 実行不可能領域を有する問題と分割に基づくアプローチによって獲得される解集合

4

機能分担に基づく 探索戦略

4.1 機能分担

これまでに提案されてきた多くの多点探索型最適化手法は、すべての探索点を一様に扱い、同一の近傍生成・選択操作による探索を行う点において共通している。これらの特徴は、アルゴリズムを簡易にし、実行時間を短縮する上で一定の利点を有していると考える。一方で、前章で論じたように、多目的最適化問題に対するアプローチはそれぞれ明確な利点・欠点を有している。特に優越関係に基づく手法と分割に基づく手法はそれぞれが「収束性」、「一様性」に対して利点を持つと同時に他方が欠点となっており、多目的最適化における「収束性」、「一様性」の両立を困難にしている。

ところで、発見的近似解法はヒューリスティクスを活用して探索を行うことから、構造上の高い自由度を有している。発見的近似解法の枠組み上は、探索点を一様に扱う必然性はなく、探索に用いる操作も1つに限定する必要はない。一方、探索点の状態は探索点ごとに異なる上に、上述のように各操作は利点・欠点を有している。探索に用いる操作を1つの限定せずに、複数の操作の利点を活用するための探索戦略が提案できれば、唯一の操作を用いた探索に比べて優れた探索を行うことが期待できる。この考えに基づき、発見的近似解法の自由度を活用することによる高い性能を有する最適化手法

を開発する試みがなされてきた。例えば、単一目的最適化手法の Artificial Bee Colony Algorithm (ABC) [35]は、蜜蜂の採餌行動に基づき「働き蜂の探索」、「傍観蜂の探索」、「斥候蜂の探索」という機能の異なる3つの操作を用いて探索を行う。ABCは単一目的最適化問題に対して高い探索性能を有することが示されている。しかし、ABCの機能分担はアナロジーに立脚したものであり、「機能分担」の明確な定義はなされていない。

このような背景を踏まえ、本論文では発見的近似解法の自由度を拡張・活用することで効率的な探索を実現するための「機能分担」に基づくコンセプトを提案する。

4.1.1 機能分担のコンセプト

本研究では、発見的近似解法の自由度を拡張し、その自由度を探索に活用するために、以下の2点に立脚した「機能分担」に基づく探索戦略を提案する。

(a) 探索点の状態判断と分類

探索点の状態判断により探索点を分類することで、探索点の状態に応じた適切な操作の適用を可能とする。

(b) 要求に特化した複数の操作の使用

複数の要求に対してそれぞれ特化した複数の操作を用いることで、要求を効率的に達成する。

上記の(a)によって探索に高い自由度を持たせるとともに、(b)によって要求に応じた適切な操作を行うことで、各操作の有する利点を最大限活用した効率的な探索が期待できる。多目的最適化では複数の要求(収束性、広がり、一様性)を同時に満たす必要があるため、機能分担に基づく探索戦略に基づき、例えば「収束性の改善に特化した操作」、「一様性の改善に特化した操作」の併用など、要求に特化した操作を効率的に活用することで、優れた探索の実現が期待できる。機能分担に基づく発見的近似解法のフローチャートを図4.1に示す。

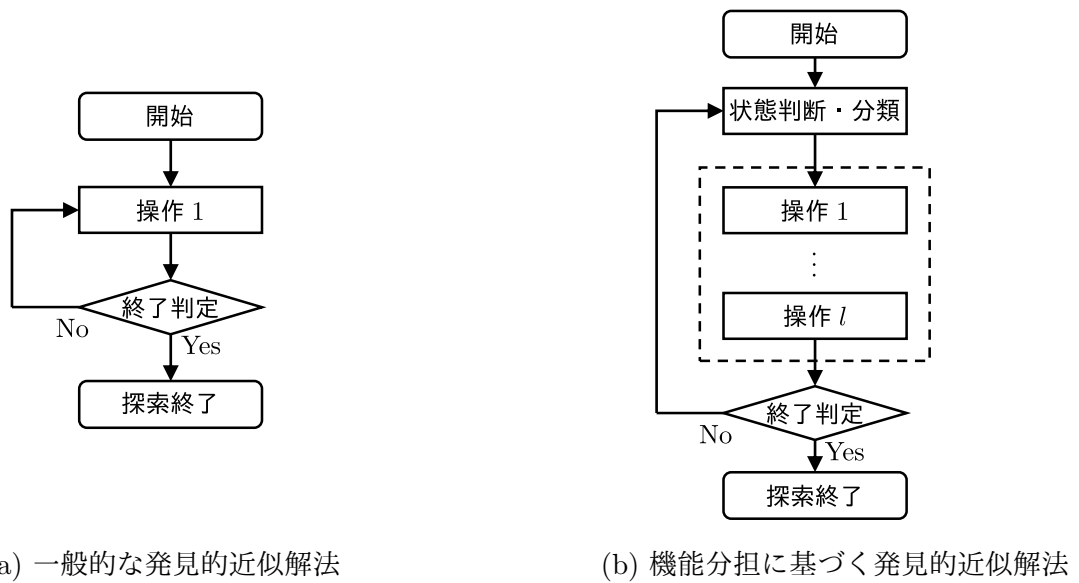


図 4.1 発見的近似解法のフローチャート

4.1.2 機能分担に関する先行研究

本研究の類似の先行研究として、文献[36], [37]があげられる。文献[36]では探索点がパレートフロンティアへ十分近づいているか否かを判断し、探索の戦略を切り替えることで効率的な探索を実現しているが、すべての探索点を一様に扱っている点で本研究と異なる。文献[37]では優越関係に基づく選択操作と分割に基づく選択操作を併用することで効果的な探索を実現するが、探索点の状態を評価しない点、およびすべての探索点を一様に扱う点で本研究とは異なる。

4.2 機能分担に基づく多目的最適化手法

機能分担に基づく探索戦略を活用し、多目的最適化問題を効率的に解くための、機能分担に基づく多目的最適化手法（Functional Specialization-based Multi-objective Optimization Algorithm: FS-MOA）を提案する。

4.2.1 多目的最適化のための機能分担の方針

既存の多目的最適化手法は、それぞれが利点と欠点を有していることを指摘した。提案手法では、既存の手法のうち、優越関係に基づく手法と分割に基づく手法に着目する。優越関係に基づく手法はパレートフロンティアの形状に依存せず優れた一様性を有する解集合が獲得できる。一方、分割に基づく手法は高い収束性を有する解集合が獲得できる。これらの手法は収束性・一様性に対して相補的な関係にあり、これらの手法の利点を活用することができれば、収束性・一様性の双方に優れた解集合の獲得が期待できる。

本研究では、以下の方針に従い多目的最適化のための機能分担に基づく探索戦略を構築する。

- 探索点の状態判断と分類

優越関係に基づく手法による改善が可能か否かを判断する。他の探索点に優越されている、あるいは混雑している場合、優越関係に基づく手法によって収束性と一様性の改善が期待できる。一方で、他の探索点に優越されておらず、かつ混雑していない場合、優越関係に基づく手法ではこれ以上の改善が困難であるため、分割に基づく手法による改善を行う。

- 要求に特化した操作

優越関係に基づく選択を一様性の改善機能と位置づける。また、分割に基づく選択を収束性の改善機能と位置づける。優越関係に基づく選択は探索点間の距離に基づく一様性の改善が可能である。分割に基づく選択は優越関係の生じない状況下でも収束性に優れた解集合の獲得が期待できる。

以上の方針に基づき、多目的最適化において機能分担に基づく探索戦略を実現する。機能分担に基づく多目的最適化手法の基本的な構造は分割に基づく手法に立脚しており、各探索点に対応する重みベクトル \mathbf{w} ($\sum_{k=1}^r w_k = 1, w_k > 0$) を有している。他の探索点に優越される、あるいは混雑する探索点が存在しない場合は、提案手法の探索は分割に基づく手法と一致する。

4.2.2 探索点の状態判断と分類

優越関係および混雑度に基づき、状態評価のための適合度および分類のためのしきい値を定める。提案手法では、「他の探索点に優越されている」または「混雑している」探索点は優越関係に基づく選択操作を行うべきであると考え、対応する重みベクトルの削除を行う。「他の探索点に優越されている」ことは、探索点同士の優越関係を調べ上げることによって評価できる。次式を満たす時、探索点 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ は他の1つ以上の探索点に優越されている。

$$D(\mathbf{x}_i) = |\{\mathbf{y} \in \mathbf{P} | \mathbf{y} \prec_p \mathbf{x}_i\}| \geq 1 \quad (4.1)$$

次に、「混雑している」状態を判断するためのしきい値を定める。混雑の判断に探索点間のユークリッド距離を用いる。他の探索点と近接している探索点は混雑しているものと判断する。探索点 \mathbf{x}_i から最も近接した探索点までの距離を d_i とした時、パラメータ $C \in [0, 1]$ を用いて以下のように混雑を判断する。

$$\text{混雑する} \iff d_i < C \times \frac{\sum_{j=1}^m d_j}{m} \quad (4.2)$$

パラメータ C は混雑の判断の厳しさに対応している。 $C = 0$ の時、すべての探索点は「混雑していない」と判断される。 $C = 1$ のとき、 d_i が探索点の平均よりも小さい探索点が「混雑している」と判断される。

4.2.3 選択操作

提案手法における選択操作として、分割に基づく選択と優越関係に基づく選択を両立させるために、次のような2段階の選択操作を用いる。

分割に基づく選択操作

1段階目の選択操作として、重みベクトルを用いたスカラー化適合度に基づく選択操作を行う。スカラー化関数として以下の理由から重み付けチェビシェフノルムを用い

る。分割に基づく手法ではスカラー化関数として主に荷重和、重み付けチェビシェフノルム、Penalty-based Boundary Intersection (PBI) が用いられる。荷重和は非凸なパレートフロンティアに対して用いた場合、パレート解を獲得できない領域が生じることが知られている[38]。また、PBIは凸なパレートフロンティアに対して用いた場合、境界付近のパレート解が獲得できない場合があることが指摘されている[31]。これらに対して、重み付けチェビシェフノルムは弱パレート解の存在しない条件下でパレートフロンティア全域のパレート解を獲得可能である[27]。機能分担に基づく探索戦略は、幅広い問題に対して解集合の収束性と多様性を両立するための戦略であり、用いるスカラー化関数は問題に依存しない性質を有することが望ましい。

探索で得られた理想点を \mathbf{z} とすれば、重み付けチェビシェフノルムに基づくスカラー化適合度 S は次式で与えられる。

$$S(\mathbf{x}|\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \max_k [(f_k(\mathbf{x}) - z_k) \times w_k] \quad (4.3)$$

$S(\mathbf{x}|\mathbf{w}, \mathbf{z})$ に基づき、 $|\mathbf{W}|$ 個の重みベクトルに対して、 $S(\mathbf{x}|\mathbf{w}, \mathbf{z})$ が最小となる解を \mathbf{P}^{G+1} として選択する。

優越関係に基づく選択操作

2段階目の選択として、優越関係に基づく選択操作を行う。 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^G$ に対して、優越関係および選択済みの解 \mathbf{P}^{G+1} からの距離に基づく適合度 fit を以下のように与える。

$$fit_{\text{dom}}^i = |\{\mathbf{y} \in \mathbf{P}^{G+1} \cup \mathbf{P}^G | \mathbf{y} \prec_p \mathbf{x}_i\}| \quad (4.4)$$

$$fit_{\text{dist}}^i = \frac{1}{1 + d_{\text{NN}}^i} \quad (4.5)$$

$$d_{\text{NN}}^i = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}^{G+1}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \quad (4.6)$$

$$fit^i = fit_{\text{dist}}^i + fit_{\text{dom}}^i \quad (4.7)$$

計算された適合度に基づき、適合度の小さな解から \mathbf{P}^{G+1} へ追加する。この時、選択された解には新たな重みベクトルが以下のように与えられる。ここで、 ε は分母が0にな

ることを防ぐための微小値であり，本研究では $\varepsilon = 10^{-6}$ としている。

$$w_k(\mathbf{f}, \mathbf{z}) = \frac{1}{A \times \max(f_k - z_k, \varepsilon)} \quad (4.8)$$

$$A(\mathbf{f}, \mathbf{z}) = \sum_{l=1}^r \frac{1}{\max(f_l - z_l, \varepsilon)} \quad (4.9)$$

重み付けチェビシェフノルムは重みベクトル $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_r]$ に対して $[\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_r}]$ 方向に収束する性質があるため，上記のように重みベクトルを与えると，探索点を理想点 \mathbf{z} へと向かう方向に収束させることが可能である。

4.2.4 提案手法のアルゴリズム

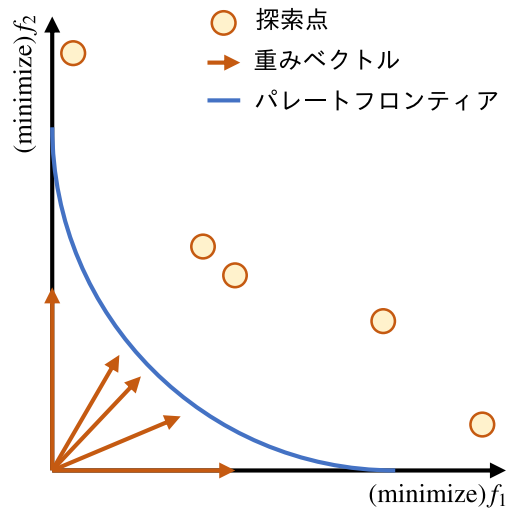
提案手法のアルゴリズムを述べる。提案手法は優越関係に基づく選択操作と分割に基づく選択操作を両立させるために，2段階の選択操作を用いる点で特徴的である。提案手法の流れの概略図を図4.2，提案手法のアルゴリズムを Algorithm 4.1 に示す。提案手法の基本的な構造は分割に基づく手法に立脚しており，各探索点是对応する重みベクトル \mathbf{w} ($\sum_{k=1}^r w_k = 1, w_k > 0$) を有している。つまり，各世代の開始時には m 個の重みベクトルが存在する。

Step 2 では (a) 探索点の状態判断と分類を行う。 G 世代目のすべての探索点 $\mathbf{x} \in \mathbf{P}^G$ に対して状態評価を行う。「他の探索点に優越されている」または「混雑している」と判断された探索点は優越関係に基づく選択操作を適用するため，対応する重みベクトル削除する。

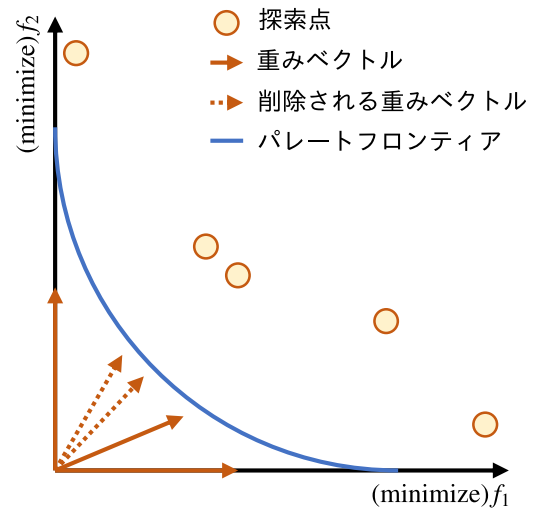
Step 3 では，探索点から子個体集合 \mathbf{Q}^G を生成する。探索点 \mathbf{P}^G と子個体 \mathbf{Q}^G を足し合わせた集合を $\mathbf{R}^G = \mathbf{P}^G \cup \mathbf{Q}^G$ とする。

Step 4 では，分割に基づく選択操作を行う。Step 2 で削除されなかった重みベクトルに対して，スカラー化関数の値が最小となる解を \mathbf{R}^G から選択し，次世代の探索点集合 \mathbf{P}^{G+1} に加える。

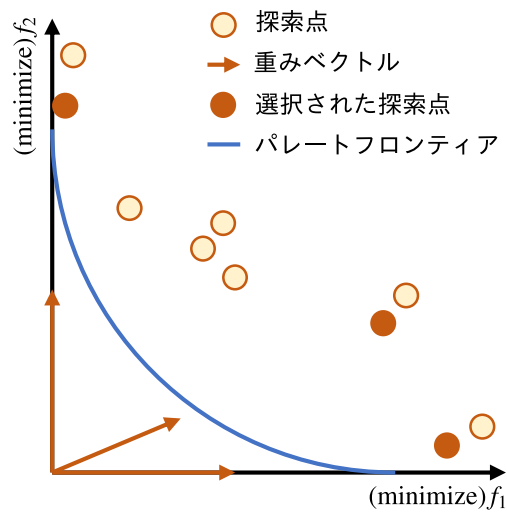
Step 5 では，優越関係に基づく選択操作を行う。 \mathbf{R}^G のうち，他の解に優越されておらずかつ多様性維持への貢献度の高い解から順に \mathbf{P}^{G+1} に加える。Step 5 で選択された探索点に対応する新たな重みベクトルを追加する。



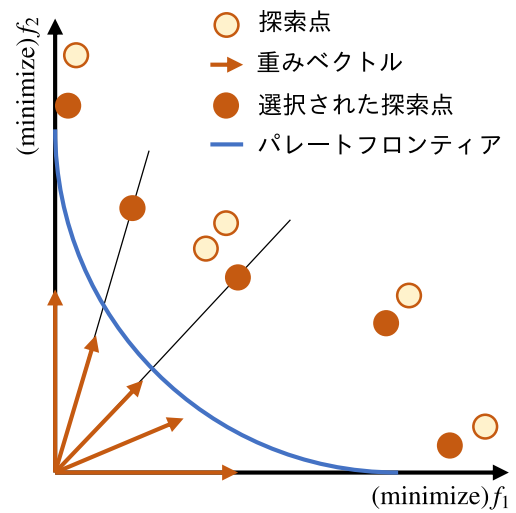
(a) 各世代の初期状態



(b) Step 2 の概略図



(c) Step 4 の概略図



(d) Step 5 の概略図

図 4.2 提案手法の探索の流れ

Algorithm 4.1: 提案手法

Step 0: 初期化

- 1: 初期個体集団 P^0 , 重みベクトル集合 W を与える ($|P^0| = |W| = m$)。
- 2: 各個体 $x_i \in P^0$ に重みベクトル $w_i \in W$ を割り当てる。
- 3: 理想点 z を求める。ここで, $z_k = \min_{x_i \in P^0} f_k(x_i)$ である。
- 4: $G = 0$ とする。

Step 1: 状態判断と分類

- 5: すべての個体間の距離を計算する。
- 6: 最も近い他の個体までの距離を $d_i (i = 1, 2, \dots, m)$ とする。
- 7: $d_i (i = 1, 2, \dots, m)$ の平均値を \bar{d} とする。
- 8: **for** すべての個体 $x_i \in P^G$ **do**
- 9: **if** $d_i < C \times \bar{d}$ または **then**
- 10: 個体 i に割り当てられた重みベクトルを削除する。
- 11: **end if**
- 12: **end for**

Step 2: 子の生成

- 13: 子個体集合を $Q^G = \emptyset$ とする。
- 14: **for** $i = 1, \dots, \frac{m}{2}$ **do**
- 15: ランダムに P^G から 2 つの親個体を選ぶ。
- 16: 交叉・突然変異で 2 つの子個体を生成する。
- 17: 生成された子個体を Q^G に加える。
- 18: **end for**

Step 3: スカラー化適合度に基づく選択

- 19: $P^{G+1} = \emptyset$ とする。
- 20: $R^G = P^G \cup Q^G$ とする。
- 21: **for** すべての重みベクトル $w_i \in W$ **do**
- 22: $x_i = \operatorname{argmin}_{x \in R^G} S(x|w_i, z)$
- 23: x_i を P^{G+1} に加える。
- 24: x_i を R^G から削除する。
- 25: **end for**

Step 4: パレートランキングに基づく選択

- 26: **while** $|P^{G+1}| < m$ **do**
- 27: 式 (4.7) により $x \in R^G$ に適合度を与える。
- 28: 最も適合度が優れた解 x を P^{G+1} に加える。
- 29: 最も適合度が優れた解 x を R^G から削除する。
- 30: **end while**

Step 5: 終了判定

- 31: **if** $G < G_{\max}$ **then**
- 32: $G := G + 1$ として Step 1 へ戻る。
- 33: **end if**

4.3 数値実験

多目的最適化手法の評価方法には、評価に用いる解の観点から次の2つが考えられる。

(1) 最終世代の探索点のみに着目した評価

探索過程で評価した解のうち、最終世代の探索点のみに対して評価を行う。

(2) 探索過程で得られた近似パレート解すべてに対する評価

探索過程で評価した解のすべてを保持し、最終世代の探索点に加え、探索過程で淘汰された解も含めて評価を行う。

(1)の方法では世代交代を経て生き残った解の評価を行うため、選択操作の性質を詳細に議論することができると考える。しかし、実応用では探索過程で得られた近似パレート解のすべてが知見抽出の対象になると考えられるため、(1)の方法は実応用を想定した評価になっているとは言い難い。(2)の方法は実応用を想定した評価になると考えられるが、探索過程で淘汰された解も含めた評価であり、手法の性質の評価が困難になる。

本論文では、4.3.1項および4.3.2項において、(1)の方法を用いて提案手法の性質について詳細に議論し、4.3.3項において(2)の方法で実応用を想定した提案手法の性能の評価を行う。4.3.1項では2目的最適化問題に限定し、提案手法のパラメータの有する性質など、機能分担が探索に与える影響を検証する。4.3.2項では2目的、3目的、5目的の問題を用いて数値実験を行い、目的数の増加の影響を検証する。4.3.3項では、2目的、3目的、5目的の問題を用いて提案手法の探索性能を評価する。

4.3.1 機能分担の影響解析

実験条件

2目的のベンチマーク問題を対象に、機能分担が探索に与える影響を解析する。対象問題は様々な関数形状、様々なパレートフロンティアの形状の問題を用いるために、WFG問題集[39]を用いる。WFG問題集では決定変数の次元数、目的数、パレートフロンティアの形状を指定可能である。また、パレートフロンティアが既知であり、パレートフロンティアへの収束性を正確に評価可能であるなど、優れた性質を有してい

る。ただし、3目的以上では $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面を基調とした問題となり、非現実的な問題設定となってしまうため、本研究では2目的最適化問題に限定して使用する。多峰性関数である WFG4 と単峰性関数である WFG7 を用いる。これらの問題はパレートフロンティアの形状関数は concave であるが、convex/mixed (WFG1 と同様)、convex に変更した計6種類の問題を用いる。WFG は通常、各目的関数値のスケールが異なっているが、評価を容易にするため、本研究では各目的関数値を規格化して使用する ($S_k = 1$)。決定変数の次元数 n は WFG4 では 24 (位置パラメータ 4, 距離パラメータ 20), WFG7 では 44 (位置パラメータ 4, 距離パラメータ 40) とする。

最終世代の探索点集合のうち、他の探索点に優越されない解に対して Generational Distance (GD), Cover Ratio (CR) を用いた評価を行う。GD は収束性の評価指標であり、解集合からパレートフロンティアまでの平均距離を示す。GD が小さいほど、収束性に優れた解集合であると判断する。本実験では、WFG 問題における評価値の計算過程で得られる x_M の値を用いた。 x_M はパレートフロンティアまでの距離を示す。CR は一様性の評価指標であり、CR が大きいほど一様性に優れた解集合であると判断する。CR の計算は次の手順で行われる。まず、目的関数 f_k 軸の最大値・最小値の間を分割数 N で分割する。次に、分割された領域に対して解が存在するなら 1, 存在しないなら 0 とする。その合計を N で割った値を cr_k とする。これをすべての目的関数軸に対して行い、 cr_k ($k = 1, 2, \dots, r$) の平均値として CR を得る。本実験では CR の分割数は 100 とし、目的関数空間の $[0, 1]^r$ の範囲で計算を行った。

比較手法として、パレートランキングに基づく手法である SPEA2 [26], およびスカラー化に基づく手法である MOEA/D [28] を用いる。すべての手法において、交叉は Simulated Binary Crossover [40] (SBX), 突然変異は Polynomial Mutation [25] (PM) を用いる。SBX および PM のパラメータは先行研究 [28, 33] を参考に、交叉率 $P_c = 1$, 突然変異率 $P_m = \frac{1}{n}$, 分布定数 $\eta_c = \eta_m = 20$ とする。探索点数 $m = 100$ とする。FS-MOA および MOEA/D の重みベクトル集合は、文献 [41] の方法を用いて生成する。MOEA/D のスカラー化関数は提案手法と同様に重み付けチェビシェフノルムとし、近傍数 T は $T = 10, 20, 30, 40, 50$ で事前実験を行い、優れた GD を与えた $T = 40$ とする。FS-MOA の混雑判定パラメータは $C = 0, 0.1, \dots, 1$ とする。

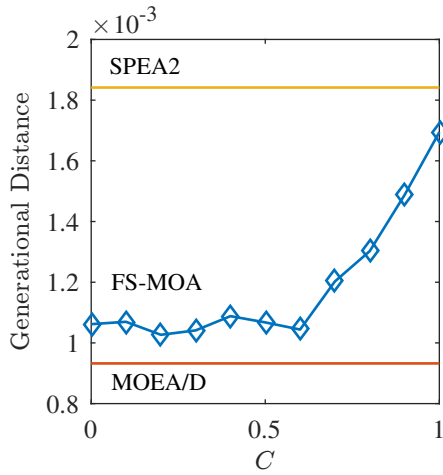
実験結果と考察

WFG4に基づく問題に対する実験結果を図4.3に示した。WFG7に基づく問題に対する実験結果を図4.4に示した。

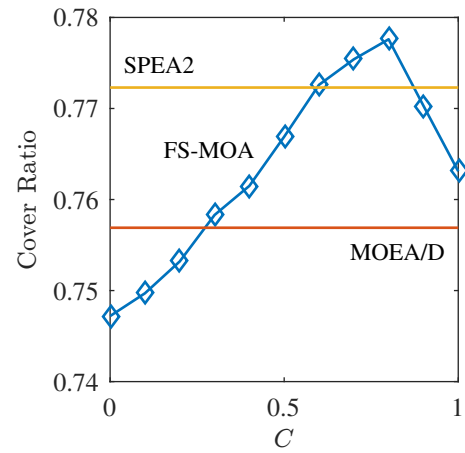
MOEA/Dはすべての問題で最も優れたGDを示しており、収束性に優れた解集合が獲得できている。一方で、MOEA/Dはすべての問題でSPEA2に比べてCRに劣っており、一様性に劣る解集合が獲得されている。分割に基づく手法では一様な重みベクトルを用いて探索を行うが、重みベクトルの分布の一様さは獲得される解集合の分布の一様さを保証しないため、比較的一様性に劣る解集合が獲得される結果になったと言える。一方で、SPEA2は収束性には劣るが、様々な形状のパレートフロンティアで優れた一様性を有する解集合が獲得できていることがわかる。SPEA2では探索点間の距離に基づき一様性の改善を行うため、パレートフロンティアの形状に依存せず比較的一様性に優れた解集合が獲得されたと考えられる。

FS-MOAの結果に着目すると、GDは $C = 0$ から $C = 0.7$ の間で一定の値を示しており、多くの問題でMOEA/Dに近い値を示している。一方、CRはパラメータ C の増加に対して $0 \leq C \leq 0.8$ の範囲で改善の傾向にあり、特に $C = 0.7$ 付近ではSPEA2を上回る値を示している。 C は探索点の混雑判定の厳しさに対応するため、 C の増加に伴い得られる解集合の一様性が改善していると考えられる。結果として、FS-MOAの $C = 0.7$ 付近において、MOEA/Dに近い収束性とSPEA2に近い一様性を有する解集合の獲得が実現できている。この傾向は、多峰性関数のWFG4と単峰性関数のWFG7で共通しており、パレートフロンティアの形状が変化した場合にも同様である。

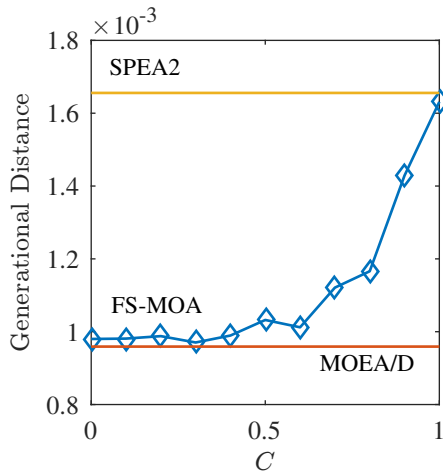
$C = 0.1, 0.7, 0.9$ の時の優越関係に基づく選択を行った探索点の割合の推移を図4.5に示した。 $C = 0.1$ の時は探索序盤でほぼすべての探索点に対して分割に基づく選択が行われている一方で、 $C = 0.9$ の時は常に多くの探索点に対して優越関係に基づく選択が行われている。 $C = 0.7$ の時は探索過程で優越関係に基づく選択を行う探索点が減少していき、探索終盤ではほぼすべての探索点に対して分割に基づく選択操作が行われている。探索過程で探索点の一様性が改善された結果、「混雑している」と判断される探索点が減少していき、優越関係に基づく選択から分割に基づく選択へと推移したと考えられる。この結果から C は解集合の収束性・一様性に影響を与えると共に、優越関係に基づく選択から分割に基づく選択への推移の速度に影響を与えることが分かる。



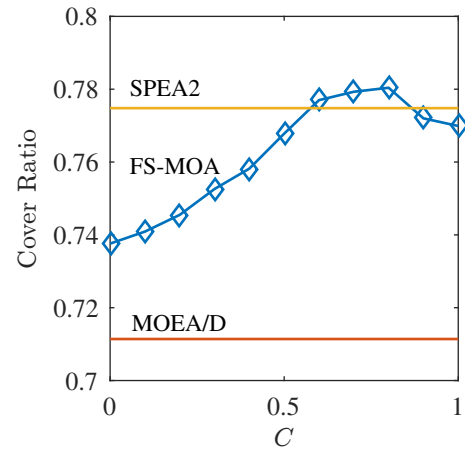
(a) WFG4-concave における GD



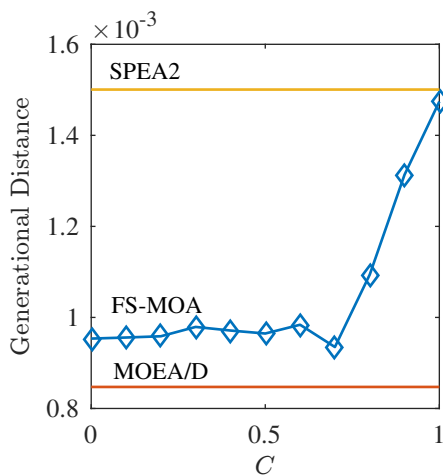
(b) WFG4-concave における CR



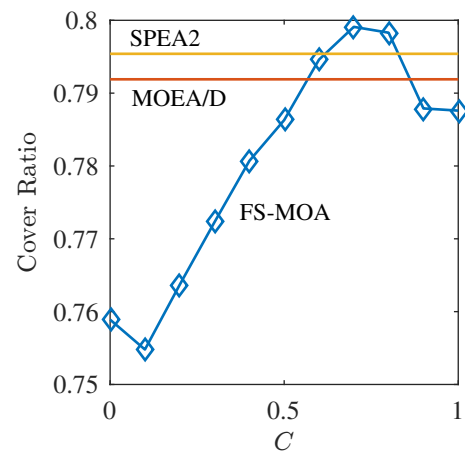
(c) WFG4-convex における GD



(d) WFG4-convex における CR

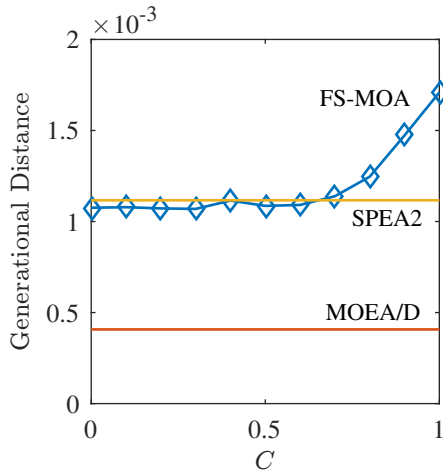


(e) WFG4-mix における GD

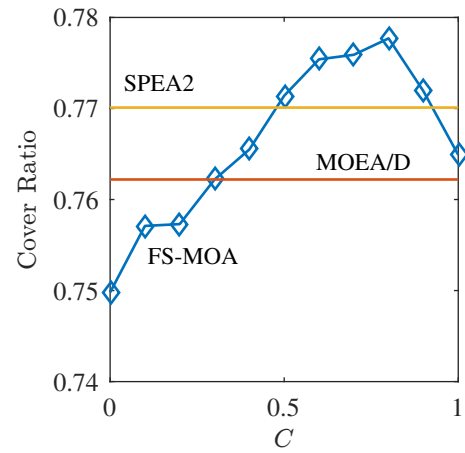


(f) WFG4-mix における CR

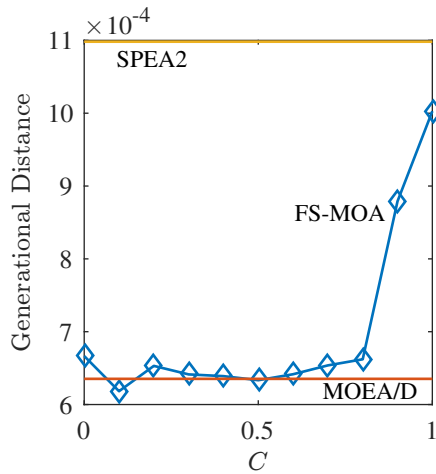
図 4.3 WFG4 に基づく問題に対する実験結果



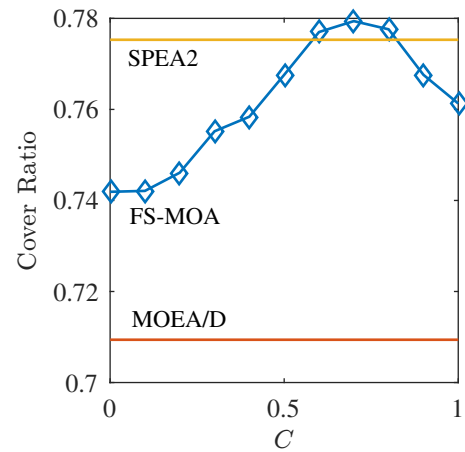
(a) WFG7-concave における GD



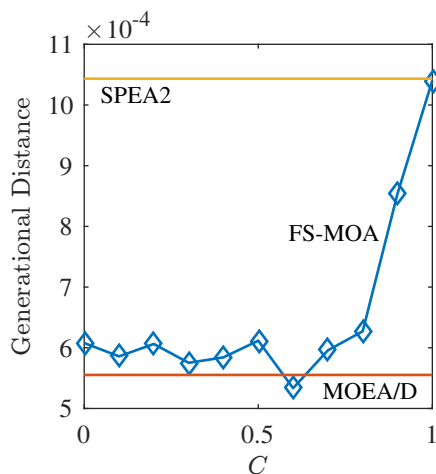
(b) WFG7-concave における CR



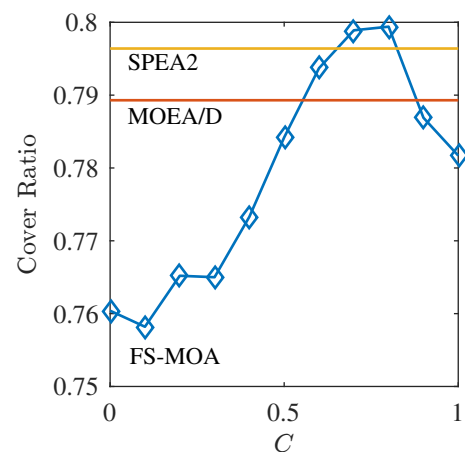
(c) WFG7-convex における GD



(d) WFG7-convex における CR



(e) WFG7-mix における GD



(f) WFG7-mix における CR

図 4.4 WFG7 に基づく問題に対する実験結果

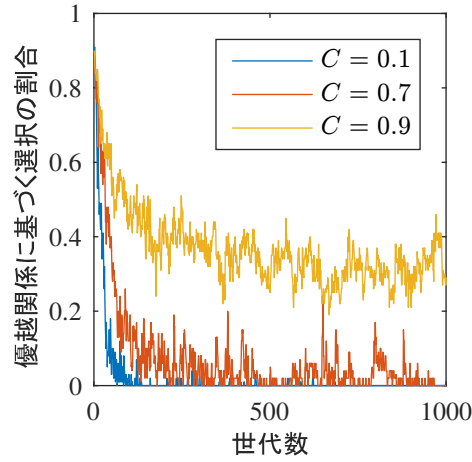


図 4.5 WFG4-concave における優越関係に基づく選択操作を行った探索点の割合

4.3.2 目的数の異なる問題を用いた数値実験

実験条件

目的数を変化させた時の探索性能を評価するために、2, 3, 5 目的の最適化問題に対して数値実験を行う。対象問題は MED-concave, MED-convex, MED-mix を用いる [42]。MED は決定変数の次元数, 目的数, パレートフロンティアの形状を指定可能な問題である。各目的関数に対して唯一の大域的最適解を有しており、分割に基づく手法では一様な解集合の獲得が困難な形状のパレートフロンティアを有する。MED は次式で与えられる。

$$f_k(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^*\| \right)^{p_k} \quad (4.10)$$

$$x_{kj}^* = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.11)$$

パレートフロンティアの形状を指定するパラメータ p_k ($k = 1, 2, \dots, r$) については、MED-concave は $p_k = 0.5$, MED-convex は $p_k = 2$, MED-mix は $p_k = \exp(2\frac{k-1}{r-1} - 1)$ とする。決定変数の次元数 n はすべての条件で 40 とする。実行可能領域は $[-5, 5]^n$ とする。

最終世代の探索点集合のうち、他の探索点に優越されない解に対して Hypervolume (HV) による性能評価を行う。HV の参照点はすべての条件で $[1, \dots, 1]$ とする。また、収束性・一様性について独立に評価するために、収束性の評価指標として GD、一様性の評価指標として Cover Ratio (CR) [22] を用いる。GD は対象問題のパレートフロンティア上にランダムに配置した 10^4 個の参照点を基に計算を行う。本実験ではすべての目的関数について最大値を 1、最小値を 0、分割数 N を 100 として CR の計算を行う。

すべての手法において、 $r = 2$ の時 $m = 100$ 、 $r = 3$ の時 $m = 105$ 、 $r = 5$ の時 $m = 126$ とする。MOEA/D の近傍数 T は $T = 10, 20, 30, 40, 50$ で事前実験を行い、優れた HV を与えた $T = 50$ とする。その他の設定は 4.3.1 項と同様とした。

実験結果と考察

MED に対する実験結果を表 4.1 に示した。提案手法の結果は最も優れた HV を示した時の結果とその時の C を示した。各指標に対して比較手法の中で最も優れた結果は太字で示した。HV に着目すると、多くの条件で提案手法が優れた結果を示している。3 目的、5 目的の場合にはすべての条件で提案手法が優れた結果を示している。GD に着目すると、SPEA2 は目的数の増加に従い GD が急激に悪化していることが分かる。一方、提案手法は 3 目的、5 目的では MOEA/D よりも優れた GD を示している。CR に着目すると、SPEA2 が多くの場合で優れた値を示しており、MOEA/D は目的数の増加に対して CR が悪化していることが分かる。一方、提案手法は SPEA2 には及ばないものの、多くの場合で MOEA/D より優れた CR を示している。すなわち、提案手法は目的数の増加に対して安定して収束性・一様性に優れた解の獲得が実現できている。

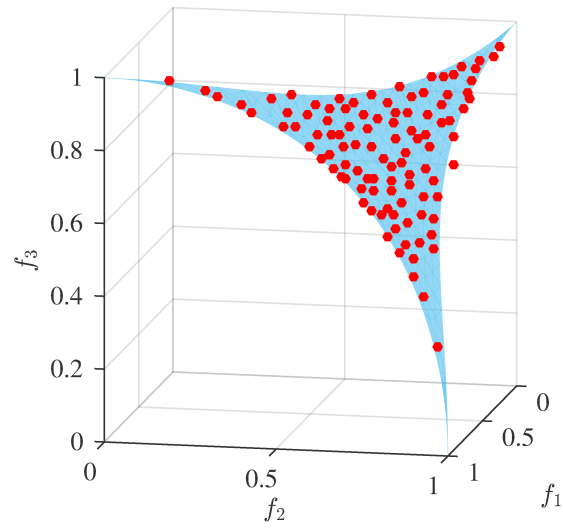
次に、提案手法のパラメータ設定について考察する。2 目的の場合において、提案手法は $0.6 \leq C \leq 0.7$ の範囲において優れた HV を示している。この結果は 4.3.1 項と比較して妥当な結果であると言える。一方、3 目的および 5 目的の場合では、2 目的の場合に比べて小さな C で優れた HV が得られている。今回の実験は限られた条件下での数値実験であるため、提案手法のパラメータ設定一般について論じることができないが、目的数の増加に対して提案手法の適切なパラメータ設定が変化する可能性がある。

3 目的の MED において各手法が獲得した解集合を図 4.6, 4.7, 4.8 に示した。MOEA/D は解が十分にパレートフロンティアに収束しているが、パレートフロンティアの境界付

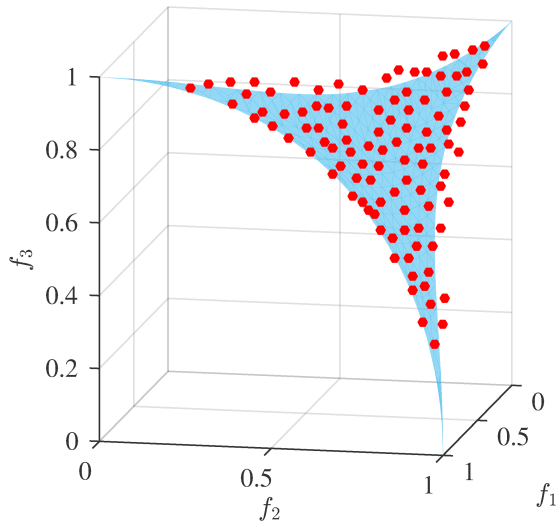
近に解が集中しており，分布の一様性に劣っていることが分かる。一方，SPEA2 は一様な解集合が獲得できているが，パレートフロンティアに十分収束できていない解が存在する。提案手法は解の分布が偏ること無く一様な解集合が獲得できていると同時に，解が十分パレートフロンティアに収束している。このことから，提案手法が収束性・一様性の両立を可能としていると言える。

表 4.1 MED に対する実験結果（GD の値は $(\times 10^{-2})$ としている。比較手法の中で最も優れた結果は太字で示している。FS-MOA は最も優れた HV を与えた C も併記している。）

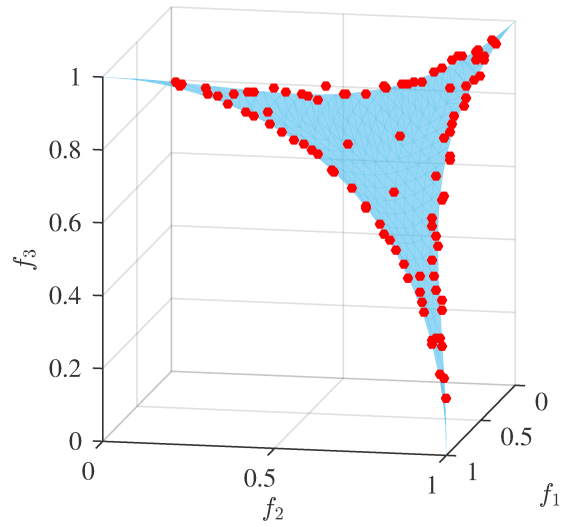
手法		FS-MOA				MOEA/D			SPEA2		
問題	目的数	C	HV	GD	CR	HV	GD	CR	HV	GD	CR
MED-concave	2	0.6	0.2079	0.1773	0.735	0.2080	0.1788	0.7286	0.2078	0.1978	0.7684
	3	0.5	0.044	0.6939	0.4873	0.03818	0.7346	0.4377	0.04191	1.653	0.5037
	5	0.4	0.001317	3.02	0.4091	0.0005657	3.326	0.2570	0.0008173	8.495	0.4030
MED-convex	2	0.6	0.8288	0.06882	0.731	0.8271	0.06400	0.6444	0.8281	0.1072	0.7371
	3	0.6	0.5951	0.9245	0.6399	0.5839	1.172	0.4981	0.5793	3.200	0.6685
	5	0	0.2111	6.462	0.6236	0.2060	6.705	0.3919	0.1159	31.33	0.6403
MED-mix	2	0.6	0.4223	0.3407	0.7685	0.4231	0.3086	0.7610	0.4225	0.3869	0.8115
	3	0.5	0.1649	0.9810	0.5742	0.1580	1.197	0.5975	0.1581	2.854	0.6024
	5	0.4	0.01788	5.385	0.5326	0.01325	5.669	0.4795	0.009240	21.87	0.5351



(a) FS-MOA

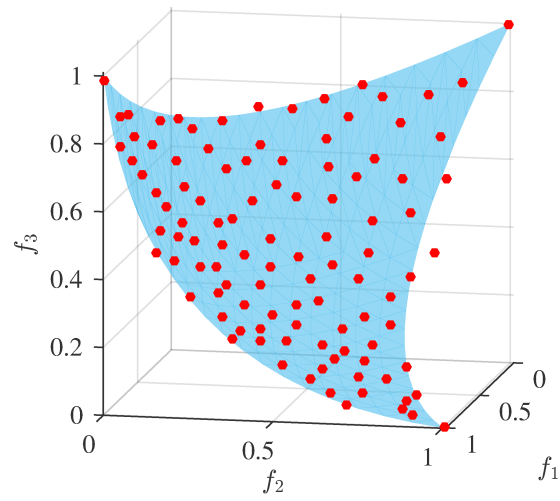


(b) SPEA2

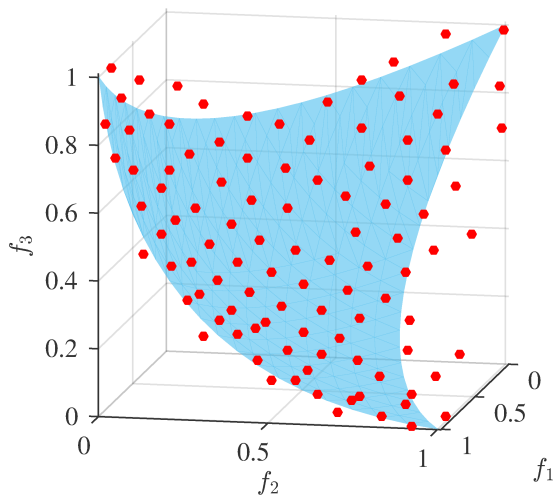


(c) MOEA/D

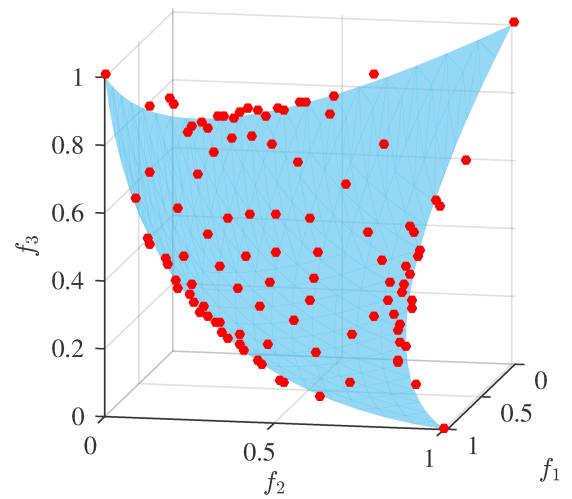
図 4.6 MED-concave (3 目的) において獲得された解集合



(a) FS-MOA

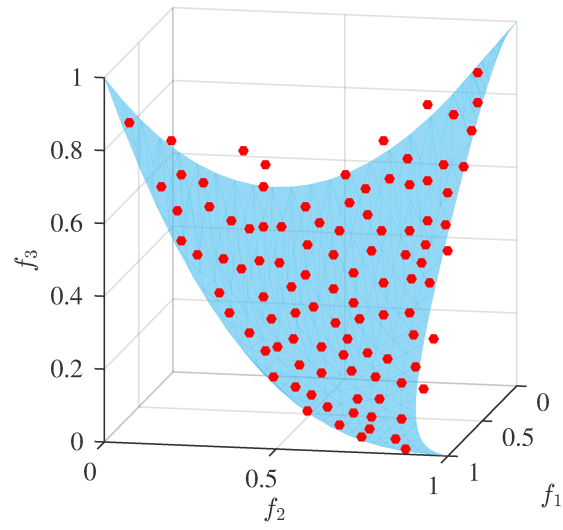


(b) SPEA2

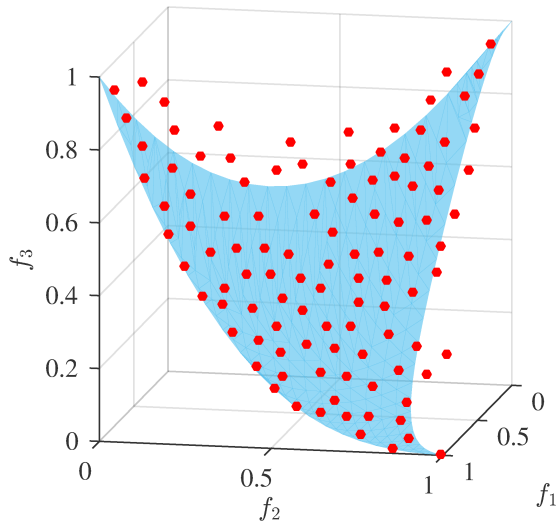


(c) MOEA/D

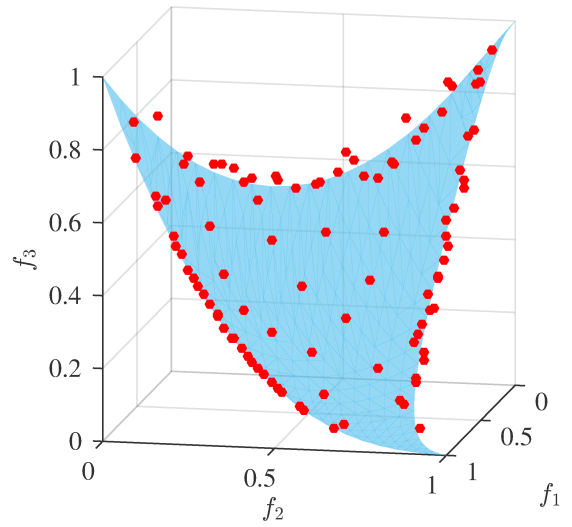
図 4.7 MED-convex (3 目的) において獲得された解集合



(a) FS-MOA



(b) SPEA2



(c) MOEA/D

図 4.8 MED-mix (3 目的) において獲得された解集合

4.3.3 無限アーカイブを用いた探索性能の評価

実験条件

探索過程で得られたすべての近似パレート解を対象に，提案手法の探索性能を評価する。解集合の評価には収束性の評価指標としてGDを用いる。評価する解の数が多くなり，HVの使用は困難であるため，パレートフロンティアの近似精度の評価指標としてIGDを用いる。GDおよびIGDの計算にはパレートフロンティア上にランダムに配置した 10^5 個のパレート解を用いる。提案手法のパラメータ C は4.3.2項で優れた結果の得られた値とし，探索過程で得られたすべてのパレート解を保持する点，用いる評価指標が異なる点以外は4.3.2項と同様である。

実験結果

実験結果を表4.2に示した。GDに着目すると，多くの条件でMOEA/Dが最も優れた値を示している一方で，IGDに着目すると提案手法が多くの条件で最も優れた値を示している。4.3.1項および4.3.2項の結果から，MOEA/Dは一様性に劣ることが分かっている。提案手法はMOEA/Dに比べて一様性に優れるため，多くの条件でIGDで優れた結果を示したと考えられる。

表4.2 MEDに対する実験結果（GD，IGDの値は $(\times 10^{-2})$ としている。比較手法の中で最も優れた結果は太字で示している。FS-MOAは C も併記している。）

手法		FS-MOA			MOEA/D		SPEA2	
問題	目的数	C	GD	IGD	GD	IGD	GD	IGD
MED-concave	2	0.6	0.1314	0.3442	0.1022	0.2641	0.1380	0.3562
	3	0.5	0.5787	0.7189	0.5597	0.8043	0.7786	0.8556
	5	0.4	2.334	2.425	2.309	3.657	4.382	3.957
MED-convex	2	0.6	0.08293	0.1039	0.06687	0.2257	0.09804	0.1129
	3	0.6	0.7338	1.175	0.7352	1.571	1.269	1.388
	5	0	4.592	4.925	4.495	5.767	15.66	10.19
MED-mix	2	0.6	0.1775	0.2787	0.1329	0.2544	0.1929	0.288
	3	0.5	0.6415	0.8425	0.6661	1.011	1.058	1.059
	5	0.4	3.563	3.386	3.473	3.938	9.452	6.083

5

多目的最適化手法の 優良解集合探索への 応用

5.1 優良解集合探索問題

一般的な単一目的最適化では、評価値を最小化する唯一の大域的最適解を求めることが目的となる。一方で、最適化の実応用では、しばしば複数かつ多様な解の獲得が要求される場合がある[11]。本研究グループでは、これまでに「評価値が一定以上優れる」かつ「解相互の距離が一定以上離れる」ような解の集合を獲得する問題として、「優良解集合探索問題」を提案してきた[12]。この問題では、ユーザーから与えられる評価値の希求水準、解相互の距離の希求水準、および対象とする関数によって定義される「優良解集合」の獲得を行う。優良解集合は、優れた評価値を有する多様な解から構成される性質から、「見た目の良さ」など定式化が困難な目的を考慮するための選択肢の提示、事故あるいは技術的課題などに直面した際の代替案の提示、といった実応用で求められるニーズに対応することが期待できる。

優良解集合探索問題の性質に関する議論はこれまでに行われておらず、優良解集合探索問題の有する性質の解析、および優良解集合探索問題特有の構造を活用する優良解集合探索手法の提案が期待されている。また、優良解集合探索問題の類似の研究として、多目的最適化問題[7]、および複数の大域的最適解あるいは局所的最適解を同時に求める問題（ニッチング）[43]が存在し、これまで盛んに研究が行われてきた。優良解集合探索問題とこれらの問題には、多くの類似点が存在する。優良解集合探索問題とこれらの問題の類似構造を明らかにすることができれば、多目的最適化問題およびニッチング

の知見を有効に活用した優良解集合探索手法の提案が期待できる。

5.1.1 優良解集合探索問題の定式化

優良解集合は、実応用におけるニーズに答えるために、「大域的最適解との評価値の差が一定以内に収まる」かつ「他の局所的最適解との距離が一定以上離れている」ような局所的最適解の集合として定義される。以下では、ユーザーから与えられる評価値に対する制約を $\delta \geq 0$ 、解同士の距離に対する制約を $\varepsilon > 0$ とし、「大域的最適解との評価値の差が δ 以内に収まる」かつ「他の局所的最適解との距離が ε 以上離れる」という条件を満たす局所的最適解から構成される優良解集合を定義する。優良解集合は文献[12]において初めて定義がなされたが、本論文では以降で述べる優良解集合探索問題の解析や探索への活用を行うために、文献[12]における定義では言及されていない2つの関係を新たに定義した後、定義した関係を用いて優良解集合を定義する。文献[12]とは記述方法が異なっているが、定義される解集合は等価である。

評価値の制約を用いた関係の定義： 評価値に対する制約を取り込むために次の関係を定義する。パラメータ $\delta \geq 0$ を定める。2つの解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ について、次の条件を満たす時、 \mathbf{x}_1 は \mathbf{x}_2 より評価値の制約の下で優れる ($\mathbf{x}_1 \prec_\delta \mathbf{x}_2$)。

$$\mathbf{x}_1 \prec_\delta \mathbf{x}_2 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}_1) + \delta < f(\mathbf{x}_2) \quad (5.1)$$

$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ がすべての実行可能解に対して上記の関係を用いて劣らない、すなわち $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \not\prec_\delta \mathbf{x}$ を満たす時、 \mathbf{x} は大域的最適解との評価値の差が δ 以内となる解であり、「大域的最適解との評価値の差が一定以内の解」に対応する。

距離の制約を用いた関係の定義： 解同士の距離に対する制約を取り込むために、次の関係を定義する。パラメータ $\varepsilon > 0$ を定める。距離関数 d を与える。 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対する ε -近傍 $B(\mathbf{x}; \varepsilon)$ を、次式で定義する。

$$B(\mathbf{x}; \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\} \quad (5.2)$$

2つの解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ について、次の条件を満たす時、 \mathbf{x}_1 は \mathbf{x}_2 より距離の制約の下で優れる ($\mathbf{x}_1 \prec_\varepsilon \mathbf{x}_2$)。

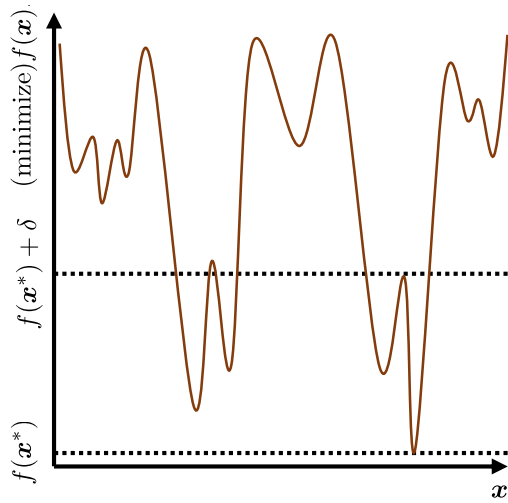
$$\mathbf{x}_1 \prec_\varepsilon \mathbf{x}_2 \iff f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2) \wedge \mathbf{x}_1 \in B(\mathbf{x}_2; \varepsilon) \quad (5.3)$$

$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ がすべての実行可能解に対して上記の関係を用いて劣らない、すなわち $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \not\prec_\varepsilon \mathbf{x}$ を満たす時、 \mathbf{x} は距離 ε より近くに自身より優れた解の存在しない局所的最適解であり、「距離の一定以上離れた局所的最適解」に対応する。以下、距離としてユークリッド距離を用いる。

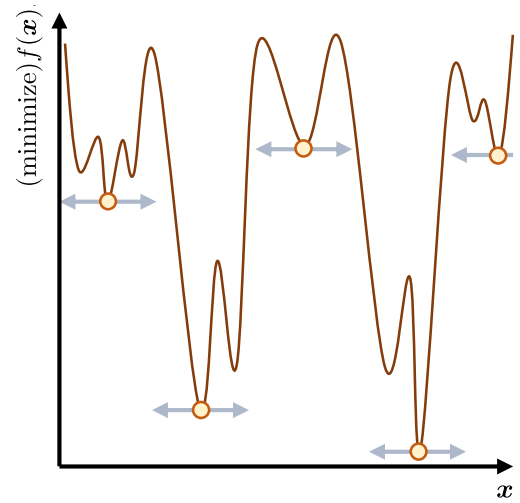
優良解集合の定義： これまでに定義した関係を用いて、すべての実行可能解 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に劣らない解の集合として、優良解集合 $S(\mathbf{X}; \delta, \varepsilon)$ を次のように定める。

$$S(\mathbf{X}; \delta, \varepsilon) = \{\mathbf{x}^* \in \mathbf{X} \mid \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{x} \not\prec_\varepsilon \mathbf{x}^* \wedge \mathbf{x} \not\prec_\delta \mathbf{x}^*\} \quad (5.4)$$

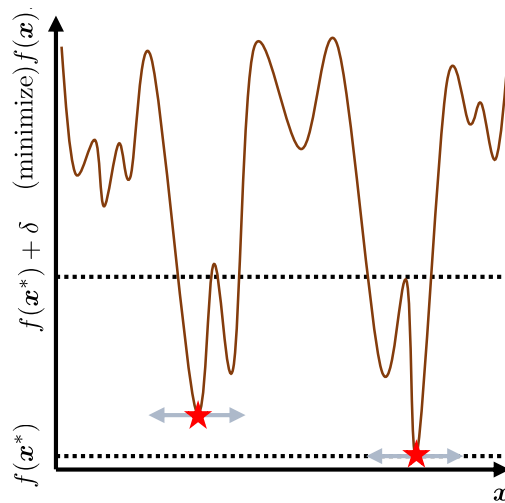
優良解集合 $S(\mathbf{X}; \delta, \varepsilon)$ は、大域的最適解との評価値の差が δ 以内であり、かつ解相互の距離が ε 以上離れた局所的最適解の集合となる。優良解集合 $S(\mathbf{X}; \delta, \varepsilon)$ を発見することを目的とした問題を、優良解集合探索問題として定式化する。優良解集合の定義の概略図を図 5.1 に示す。



(a) 評価値の制約の概略図



(b) 距離の制約を満たす解の概略図



(c) 優良解の概略図

図 5.1 優良解の定義の概略図

5.1.2 優良解集合の具体例

優良解集合探索問題の性質について議論するために、次のような関数およびパラメータ設定を考える。表 5.1 に a_i, c_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) の値を示す。この関数は A~F の 6 個

の局所的最適解を有しており、大域的最適解は $\mathbf{x} = [-3, -1.5]$ である。

$$f(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^6 \frac{c_i}{\exp(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|)} \quad (5.5)$$

そして、優良解集合を定めるためのパラメータとして、次の3通りの組合せを考える。

Case 1 比較的解同士の近接を許容し、評価値の悪化を許容しない場合 ($\delta = 30, \varepsilon = 1$)

Case 2 比較的大きな解の多様性を要求し、評価値の悪化を許容する場合 ($\delta = 100, \varepsilon = 3$)

Case 3 上記2つの場合の中程度の多様性と評価値を要求する場合 ($\delta = 70, \varepsilon = 2$)

この3つのパラメータにおいて定義される優良解集合を図5.2に示す。図中の◆は探索すべき優良解を示す。例えば、Case 1では大域的最適解に対して評価値が殆ど劣らない局所的最適解のみが優良解となるため、局所的最適解A, Bの2つが優良解となる。Case 2では解の多様性に対する希求水準が高いため、近くに自身より優れた局所的最適解がある場合は優良解とみなされない。この場合には局所的最適解Aの付近に自身より優れた局所的最適解Bが存在するため、局所的最適解Aは優良解にならない。同様に、局所的最適解Eは近くに局所的最適解Fが存在するため優良解にならない。一方で、大域的最適解に対して大きく評価値の劣る解であっても、他の優れた解から距離が離れていれば優良解となるため、局所的最適解C, D, Fが優良解となる。従来の最適化問題では、探索すべき解は対象とする関数（および制約条件）によって一意に定まった。一方で、優良解集合探索問題は対象とする関数に加え、ユーザーの希求水準に対応するパラメータが与えられることで、初めて探索すべき解が決定する。

表 5.1 式 (5.5) の各パラメータ

i	\mathbf{a}_i	c_i	対応する局所解	局所解の評価値 $f(\mathbf{x})$
1	$[-4, -1]$	90	A	-123
2	$[-3, -1.5]$	100	B	-130
3	$[-1, 4]$	40	C	-41.9
4	$[1, -4]$	40	D	-41.6
5	$[2, 1]$	60	E	-67.9
6	$[4, 2.5]$	80	F	-85.2

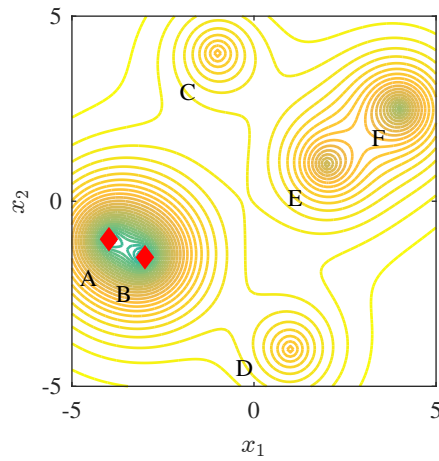
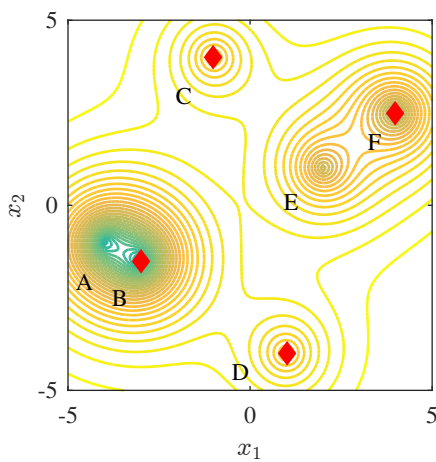
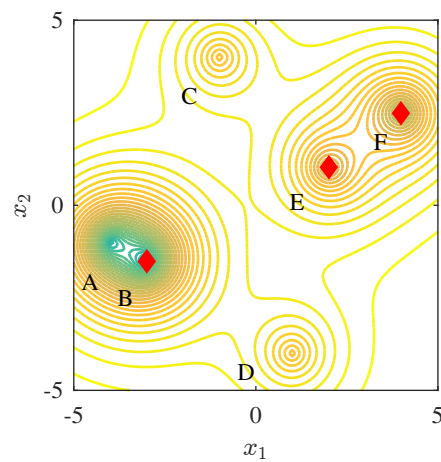
(a) $(\delta, \varepsilon) = (30, 1)$ の時の優良解(b) $(\delta, \varepsilon) = (70, 2)$ の時の優良解(c) $(\delta, \varepsilon) = (100, 3)$ の時の優良解

図 5.2 優良解の例

5.1.3 優良解集合探索問題の性質

前節で定式化した優良解集合探索問題について、類似の問題設定である多目的最適化問題およびニッチングと比較しながら、その性質を議論する。

多目的最適化問題との類似性

優良解集合探索問題は、解集合の定義から多目的最適化問題と類似している。具体的には、優良解集合とパレート解は共通して以下の性質を有する。

- (1) 解の比較を行うための関係（比較不能な場合を許容する）によって定義される。
- (2) すべての実行可能解と上記の関係が成り立たない解として定義される。
- (3) 実行可能領域 \mathbf{X} の空でない任意の部分集合 $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ において、必ず1つ以上の最適解を定義できる。

多目的最適化では、優越関係によって探索点を比較し、優れた探索点を積極的に次世代へと残すことで、探索点全体をパレートフロンティアへと収束させる戦略が提案されている（優越関係に基づく手法）。この方法は上記の性質に立脚している。一方、優良解集合の定義の中にも解の比較を行うための関係が定義されることから、優良解集合の探索においても、多目的最適化における優越関係に基づく手法に相当する方法が提案できる可能性がある。

ニッチングとの関係性

多峰性関数を対象に、すべての局所的最適解を同時に求める試みはニッチングと呼ばれ、これまでに多くの研究が行われてきた[43]。優良解集合探索問題は、以下の点からニッチングの特殊な問題設定として捉えることができる。

- (4) 特定の条件（ $\gamma \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ ）において、優良解集合は「すべての局所的最適解」と等価になる。
- (5) 優良解集合は、特定の局所的最適解として定義される。

優良解集合探索問題がニッチングの特殊な問題設定なのであれば、一般的なニッチン

グ手法を用いることで優良解集合探索問題を解くことも可能である。しかしながら、一般に問題特有の構造を埋め込むことで、優れた最適化手法の構築が期待できる。そのため、優良解集合探索問題特有の性質、具体的にはパラメータ γ, ε を探索に活用することで、優れた優良解集合探索手法の構築が可能になると考える。

5.2 優越関係に基づく優良解集合探索

5.2.1 優良解集合探索問題への優越関係に基づく手法の適用

これまでの議論から、優良解集合とパレート解集合が多くの性質を共有していることを明らかにした。優越関係に基づく多目的最適化手法は、優越関係に基づく順位付け操作を行うことで、探索点集合全体のパレートフロンティアへの収束を期待する。優越関係に基づく手法は、優越関係およびパレート解の有する性質を活用することで、多目的最適化問題を解いている。一方、優良解集合がパレート解集合と類似の解集合として定義されることを踏まえると、優越関係に基づく手法を優良解集合探索へ応用することが可能であると考えられる。

本研究では、優越関係に基づく手法における優越関係 (\prec_p) を、優良解集合を定義するための関係 ($\prec_\varepsilon, \prec_\gamma$) に置き換えることで、優越関係に基づく手法によって優良解集合を探索する方法を提案する。提案する優良解集合探索問題の解法では、優越関係に基づく手法に対して次の変更を加える。

【優越関係に基づく手法による優良解集合探索】

優越関係に基づく手法における関係 $x_1 \prec_p x_2$ を $x_1 \prec_\gamma x_2 \vee x_1 \prec_\varepsilon x_2$ と置き換える。

5.2.2 優越関係に基づく優良解集合探索手法の提案

優越関係に基づく手法の優良解集合探索への応用の基礎的検討として、最も単純な優良解集合探索手法 (Superior Solution Set Search Genetic Algorithm: S4-GA) を提案する。S4-GA のアルゴリズムを Algorithm 5.1 に示す。提案手法では、関係 ($\prec_\gamma, \prec_\varepsilon$) に基づく順位付けを行う。関係 ($\prec_\gamma, \prec_\varepsilon$) に基づく順位付けでは、探索点 $x \in P$ の適

合度 fit を次のように与える。

$$fit = |\{y \in P | y \prec_\gamma x \vee y \prec_\epsilon x\}| \quad (5.6)$$

上式は、多目的最適化において「自身を優越する探索点の数」を適合度として与える場合に相当する。適合度の計算の概略図を図5.3に示す。

さらに、 fit が等しい場合は評価値 $f(x)$ を考慮して優劣を判断する。 $x_1 \prec_s x_2$ を満たすとき、 x_1 は x_2 より優れると判断する。

$$x_1 \prec_s x_2 \iff fit_1 < fit_2 \vee fit_1 = fit_2 \wedge f(x_1) < f(x_2) \quad (5.7)$$

優越関係に基づく多目的最適化手法では、優越関係で差が生じない場合は多様性維持のための貢献度によって優劣を比較している。しかし、優良解集合探索では関係 \prec_ϵ に既に多様性維持のための機能が埋め込まれている。さらに、優良解集合探索問題は単一目的最適化問題を基本としているため、 fit に差が生じない場合は絶対的な評価値 $f(x)$ で優越を判断することができる。すべての優良解 x^* は常に $fit = 0$ となる。

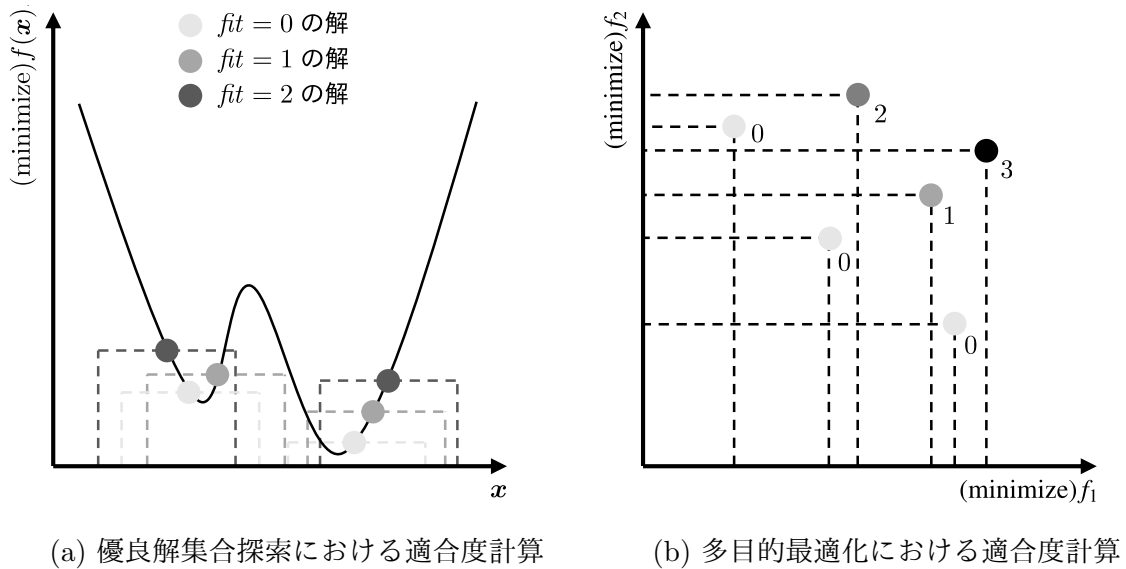


図 5.3 優良解集合探索問題と多目的最適化問題における適合度計算

Algorithm 5.1: S4-GA

Step 1: 初期化

- 1: 初期個体集団 P^0 を与える ($|P^0| = m$)。
- 2: $G=0$ とする。

Step 1: 子の生成

- 3: 子個体集合を $Q^G = \emptyset$ とする。
- 4: **for** $i = 1, \dots, \frac{m}{2}$ **do**
- 5: ランダムに親 x_a, x_b を選択する。
- 6: 交叉, 突然変異により x_a, x_b から子個体 y_a, y_b を生成する。
- 7: y_a, y_b を Q^G に加える。
- 8: **end for**

Step 2: 選択

- 9: $R^G = P^G \cup Q^G$ とする。
- 10: 関係 (\prec_s) に従い R^G 中の上位 m 個体を P^{G+1} とする。

Step 4: 終了判定

- 11: **if** $G < G_{\max}$ **then**
 - 12: $G := G + 1$ として Step 3 へ戻る。
 - 13: **end if**
-

5.3 数値実験

5.3.1 実験条件

提案手法の有する性質を評価するための基礎的な数値実験を行う。優良解集合探索問題に対する解法の提案はこれまでにほとんど行われておらず、特に優良解集合探索問題特有のパラメータ (δ, ε) を活用する優良解集合探索手法の提案は本研究が初めてである。そのため、2次元の比較的簡単な問題を対象として、提案手法の振る舞いを評価する。

比較手法として、ニッチング手法の中でも優れた性能を有することが広く知られており、提案手法と同様に世代ごとに探索点間の距離計算を必要とする手法である DE/nrand/1/bin [44] を用いる。DE/nrand/1/bin は Differential Evolution の変異ベクトル生成に用いる基準ベクトルとして自身から最も近い他の探索点を選ぶことで、各探索点が自身の近くの有望領域を探索する。

パラメータ δ, ε に対して優良解集合が変化する関数を用いて数値実験を行う。対象と

する関数は、(5.5) 式を用いる。使用するパラメータは $\delta = 30, 70, 100$ および $\varepsilon = 1, 2, 3$ を組合せた計 9 通りとする。最大世代数は 100 とする。探索点数は 30 とし、初期解は実行可能領域 $[-5, 5]^2$ 内にランダムに与える。

提案手法では、交叉に Simulated Binary Crossover (SBX) [40]、突然変異に Parameter Based Mutation (PBM) [25] を用いる。交叉率 $p_c = 1$ 、突然変異率 $p_m = 0.5$ とし、分布調整変数は事前実験を行い、優れた結果の得られるパラメータとして交叉に対して $\eta_c = 2$ 、突然変異に対して $\eta_m = 10$ とする。DE/nrand/1/bin のパラメータは同様に事前実験を行い、膨張率 $F = 0.4$ 、交叉率 $C = 0.2$ とする。

優良解を探索する性能として、優良解の獲得率 (Peak Ratio: PR) [46] を評価する。最終世代の探索点を $\mathbf{x} \in \mathbf{P}^{G_{\max}}$ とし、獲得すべき優良解を $\mathbf{x}^* \in \mathbf{S}(\mathbf{X}; \delta, \varepsilon)$ とする。 γ を微小値とした時、各優良解 \mathbf{x}^* について、 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \gamma$ となる \mathbf{x} が存在する時、優良解 \mathbf{x}^* を獲得したものを見なす。すべての優良解を獲得できた場合、PR は 1 となる。また、各手法の挙動を解析するため、探索点の優良解への収束率 (Convergence Ratio: CR) を提案する。

$$CR = \frac{|\{\mathbf{x} \in \mathbf{P}^{G_{\max}} \mid \|\mathbf{x} - \exists \mathbf{x}^*\| \leq \gamma\}|}{\|\mathbf{P}^{G_{\max}}\|} \quad (5.8)$$

CR は $[0, 1]$ で定義され、優良解に十分収束していない、あるいは優良解ではない局所的最適解に収束している探索点が存在する場合、小さい値を取る。本実験ではすべての条件において $\gamma = 10^{-1}$ とする。異なる初期解を用いて 50 回探索を行った際の各指標の平均値および標準偏差を比較する。

5.3.2 結果と考察

パラメータ δ, ε 、該当する優良解、およびそれに対する各指標の平均値 (Mean)、標準偏差 (S. D.) を表 5.2 に示した。優れた平均値は太字で示した。S4-GA の各パラメータに対する探索点の推移を図 5.4 から図 5.12 に示した。DE/nrand/1/bin の探索点の推移を図 5.13 に示した。図中の◆は優良解、○は探索点を示す。

すべての条件で、S4-GA は DE/nrand/1/bin より高い PR を示している。すなわち、多くの優良解を発見できている。また、多くの条件で S4-GA は DE/nrand/1/bin より

高いCRを示している。すなわち、DE/nrand/1/binは探索点の収束が十分でない、あるいは優良解ではない局所的最適解に多くの探索点が収束しているのに対して、S4-GAは多くの探索点が優良解の何れかに収束している。このように、S4-GAは優良解の獲得数率、収束率ともに優れた結果を示していることから、S4-GAは多くの優良解を獲得するとともに、優良解以外の局所的最適解には探索点が収束しない性質を有していると言える。このことは、探索点の推移からも読み取ることができる。S4-GAはパラメータ δ, ε の変化に対して収束する解が変化しており、多くの探索点が獲得すべき優良解に収束している。

$(\delta, \varepsilon) = (100, 1)$ の時、S4-GAのCRが他の条件に比べて著しく悪化している。この結果について考察するために、図5.14にS4-GAの最終世代の探索点に加え、優良解を中心とする半径1の円、および評価値の制約を満たす領域を塗りつぶして示した。この図を見ると、評価値の制約を満たし、かつ優良解からの距離が1以上となる領域が存在しており、その領域に存在する探索点が淘汰されずに生き残っていることがわかる。このことから、S4-GAは評価値の制約を満たす領域が比較的大きく、距離の制約が比較的小さい場合に、探索点の収束性が悪化する特性を有する可能性がある。この現象については、探索点の優良解への収束性の悪化を引き起こすと考えられるため、今後詳細な解析および改良を行う必要があると考える。

表 5.2 優良解集合探索の実験結果（各指標の平均値について、優れた値は太字で示した。）

対象問題			S4-GA				DE/nrand/1/bin			
δ	ε	優良解	PR_{Mean}	$PR_{\text{S.D.}}$	CR_{Mean}	$CR_{\text{S.D.}}$	PR_{Mean}	$PR_{\text{S.D.}}$	CR_{Mean}	$CR_{\text{S.D.}}$
30	1	A, B	1	0	1	0	0.970	0.120	0.329	0.0920
30	2	B	1	0	1	0	0.960	0.198	0.165	0.0795
30	3	B	1	0	1	0	0.960	0.198	0.165	0.0795
70	1	A, B, E, F	0.980	0.0685	0.889	0.0578	0.945	0.105	0.664	0.111
70	2	B, E, F	0.973	0.0913	0.981	0.0750	0.933	0.135	0.499	0.117
70	3	B, F	0.990	0.0707	0.981	0.0957	0.970	0.120	0.380	0.119
100	1	A~F	0.987	0.0457	0.557	0.0433	0.913	0.0967	0.917	0.0603
100	2	B~D, E, F	0.996	0.0283	0.904	0.0679	0.900	0.116	0.752	0.0844
100	3	B~D, F	0.980	0.0685	0.857	0.102	0.910	0.131	0.633	0.0866

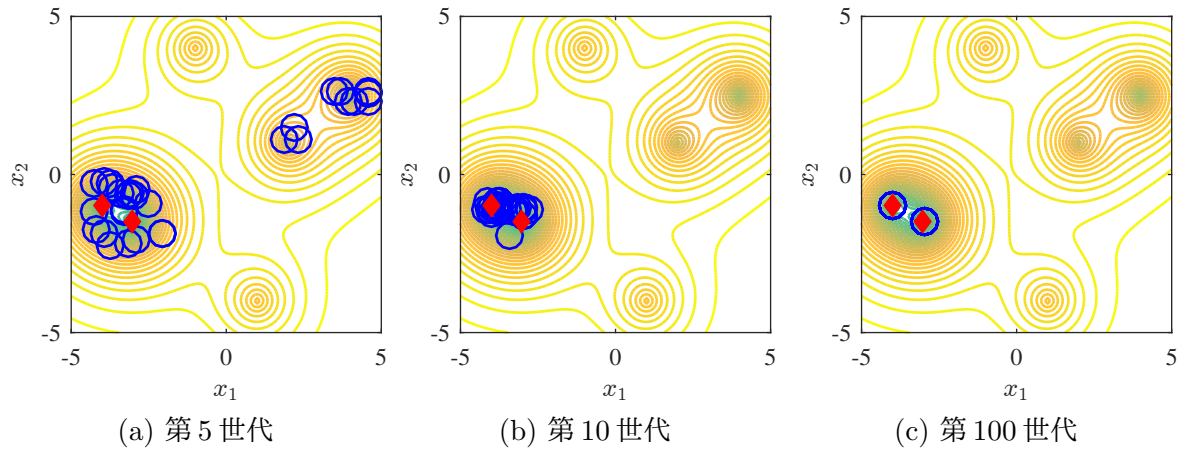


図 5.4 $(\delta, \epsilon) = (30, 1)$ の時の提案手法の探索点の推移

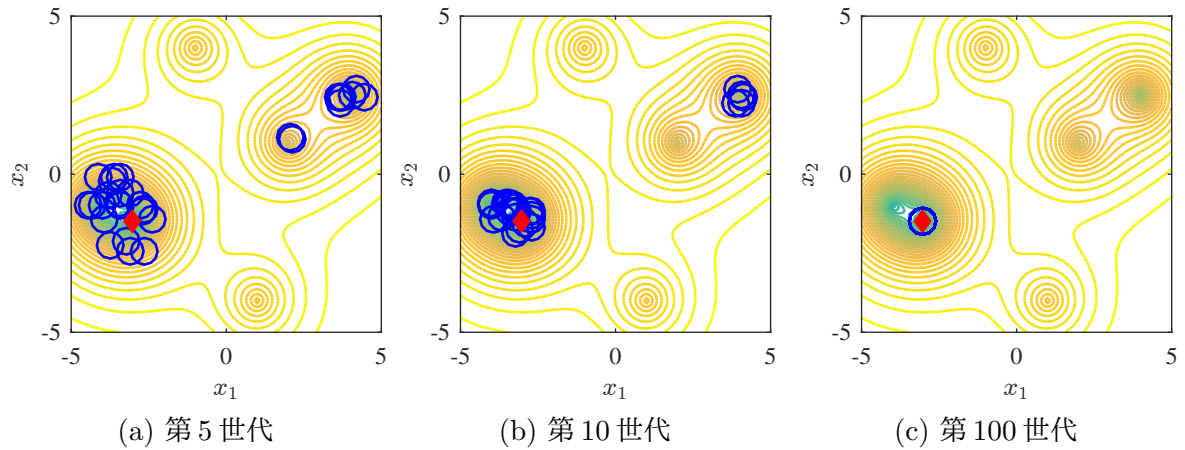


図 5.5 $(\delta, \epsilon) = (30, 2)$ の時の提案手法の探索点の推移

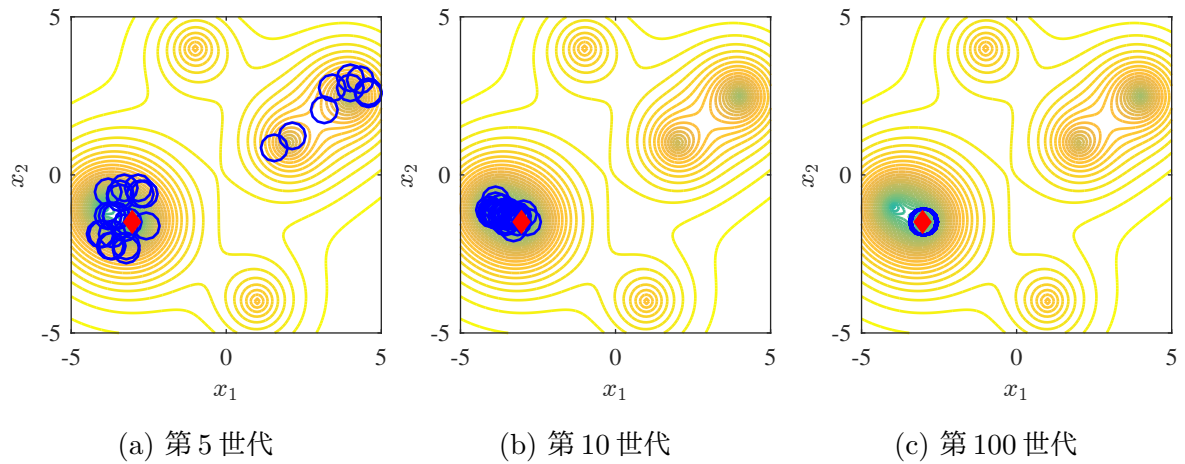


図 5.6 $(\delta, \epsilon) = (30, 3)$ の時の提案手法の探索点の推移

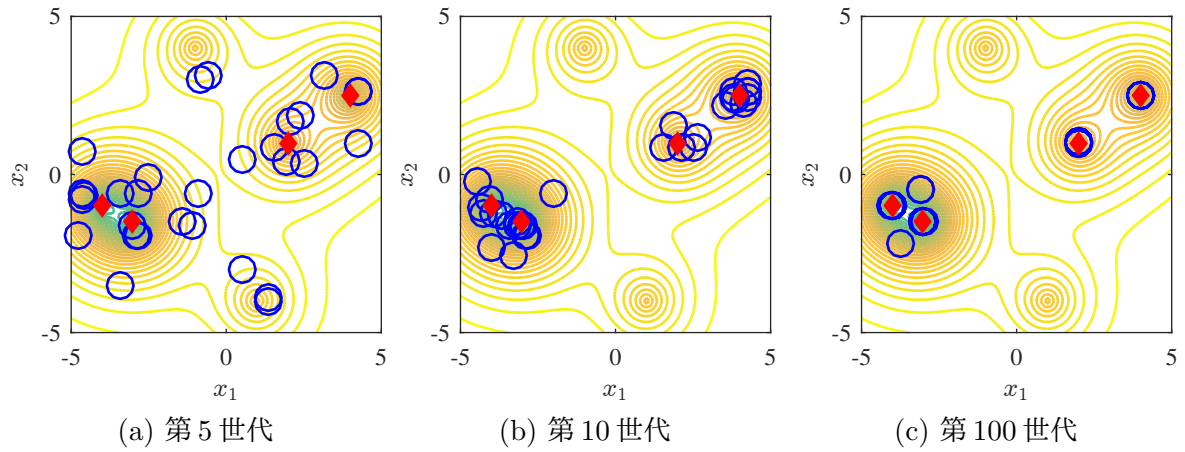


図 5.7 $(\delta, \epsilon) = (70, 1)$ の時の提案手法の探索点の推移

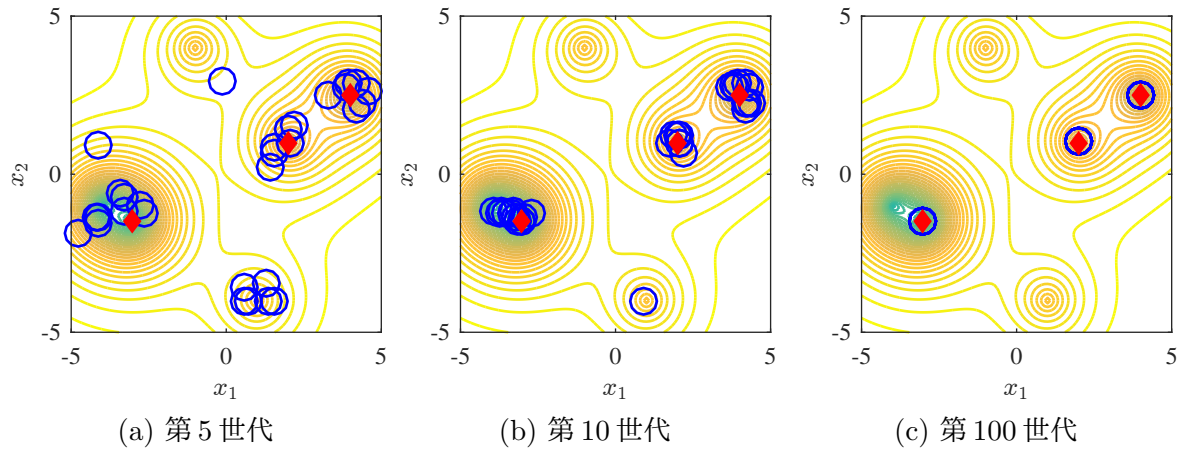


図 5.8 $(\delta, \epsilon) = (70, 2)$ の時の提案手法の探索点の推移

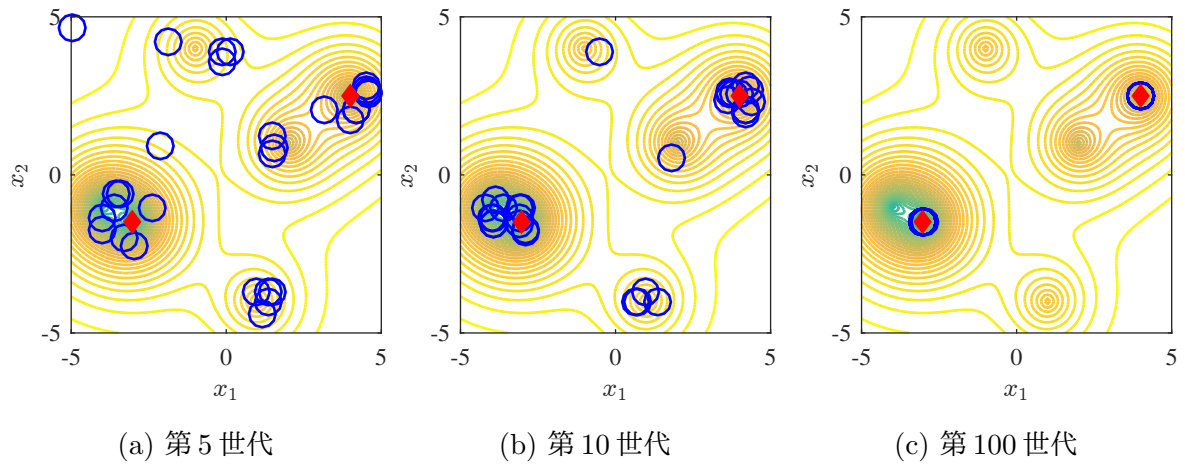


図 5.9 $(\delta, \epsilon) = (70, 3)$ の時の提案手法の探索点の推移

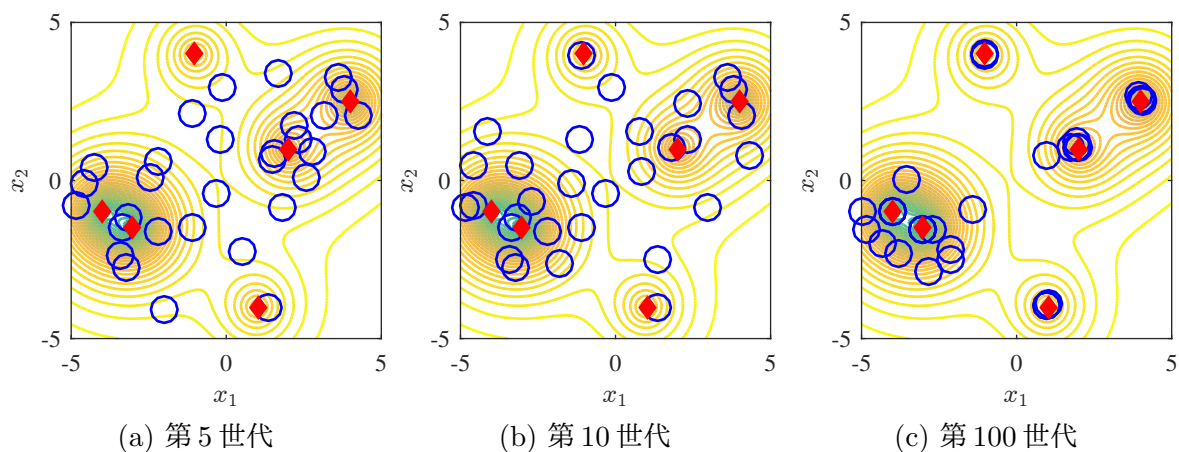


図 5.10 $(\delta, \epsilon) = (100, 1)$ の時の提案手法の探索点の推移

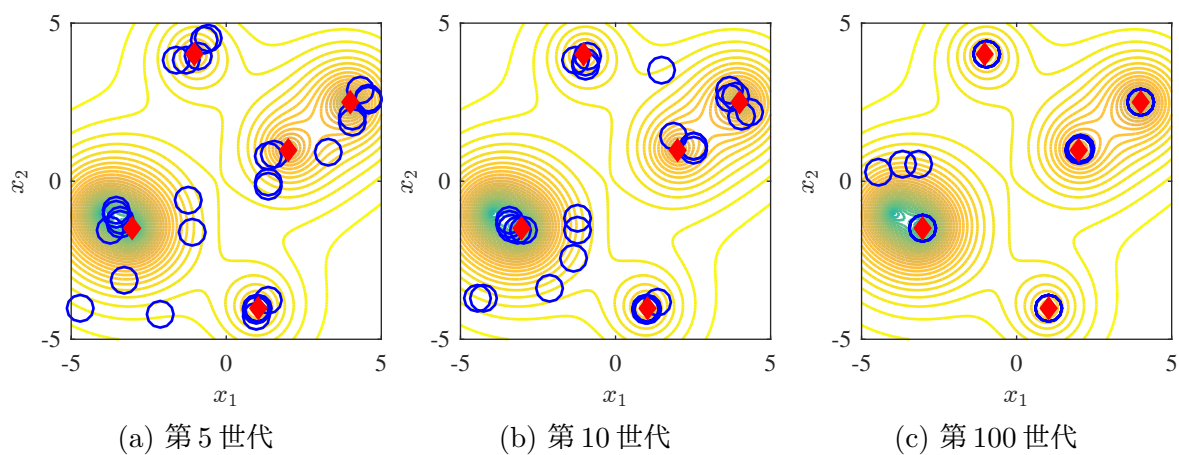


図 5.11 $(\delta, \epsilon) = (100, 2)$ の時の提案手法の探索点の推移

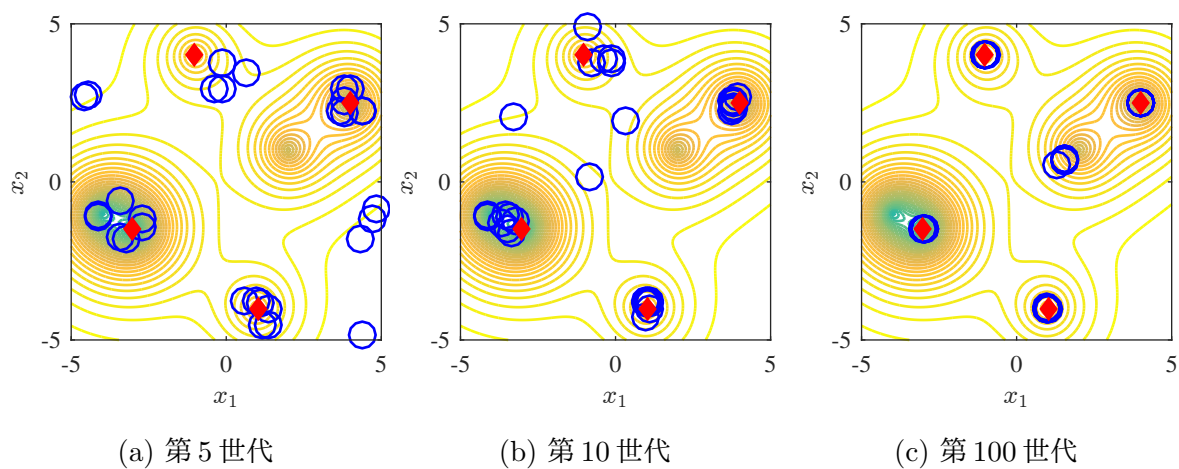


図 5.12 $(\delta, \epsilon) = (100, 3)$ の時の提案手法の探索点の推移

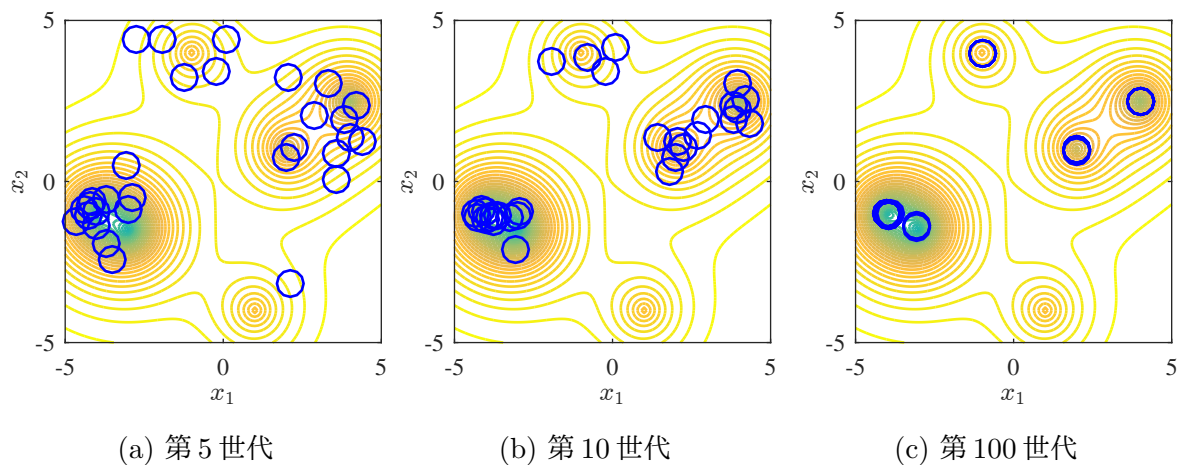


図 5.13 DE/rand/1/bin の探索点の推移

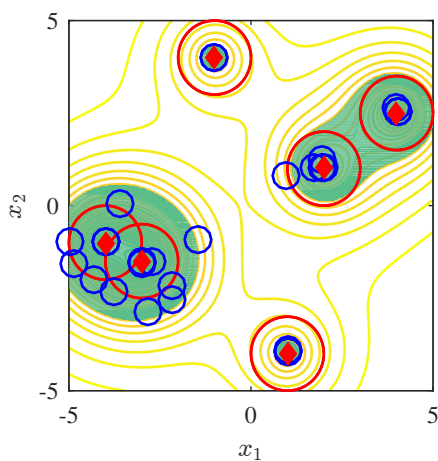


図 5.14 $(\delta, \epsilon) = (100, 1)$ の時の最終世代の探索点（塗りつぶされた領域が評価値の制約を満たす領域であり，円は優良解から半径1の領域を示す。）

6

結論

本研究では、最適化に対して最適解の獲得を超えた新たなニーズが生まれている点に着目し、多目的意思決定の支援となるような多様な解集合を獲得するための機能分担に基づく多目的最適化手法に関する研究、および単一目的最適化において一定以上評価値が優れている多様な解集合を獲得するための優越関係に基づく優良解集合探索手法に関する研究を行った。

以下にそれぞれの研究のまとめと今後の課題について述べる。

6.1 機能分担に基づく多目的最適化手法のまとめと今後の課題

本研究では、発見的近似解法の有する構造上の自由度を拡張・活用することで、優れた探索を行うための「機能分担」に基づく探索戦略の提案を行った。さらに、機能分担に基づく探索戦略を多目的最適化へ応用し、機能分担に基づく多目的最適化手法の構築を行った。本研究の着眼点は以下のとおりである。

- 多点探索型の発見的近似解法は、探索点を一様に扱う、あるいは唯一の操作を用いて探索を行う必然性がない。探索点の状態に応じた操作の切り替えを行うこと

ができれば、唯一の操作を用いて探索を行う場合に比べて優れた探索が行える可能性がある。

- 既存の多目的最適化手法はそれぞれ利点・欠点を有している。特に優越関係に基づく手法と分割に基づく手法に着目した場合、これらは収束性・一様性に関して相補的關係にある。優越関係に基づく手法と分割に基づく手法の利点を活用することができれば、既存の多目的最適化手法が課題とする収束性・一様性の両立が期待できる。

上記の着眼点に基づき、探索点の状態判断と分類、および要求に特化した複数の機能の使用、の2点を基盤とする機能分担に基づく探索戦略の提案を行った。この探索戦略は探索点の状態の一様性および機能の一様性を前提としていない点で先行研究と異なっている。数値実験の結果から、機能分担に基づく多目的最適化手法は適切なパラメータを用いることで優越関係に基づく手法と分割に基づく手法の利点を活用できることを示した。提案手法は探索点の混雑を判断するためのパラメータを有している。このパラメータは得られる解集合の収束性・一様性に対して影響を与えると同時に、優越関係に基づく選択から分割に基づく選択へと推移する速度に影響を与えることがわかった。提案手法はパレートフロンティアの形状が変化しても適切なパラメータは変化しないが、目的数の増加に対して適切なパラメータ値が変化する可能性を示した。

機能分担に基づく探索戦略は柔軟な枠組みであり、用いる操作の数に制限はない。本研究では多目的最適化における収束性・一様性の両立に着眼したが、今後は多目的最適化における広がり of 改善機能の検討など、さらなる操作の追加により、優れた多目的最適化手法の構築が期待できる。提案手法の有するパラメータに関する検討は、獲得される解集合に影響を与えることから、パラメータに関する検討は重要な課題である。本研究では、目的数に対して適切なパラメータが変化する可能性を示したが、今後は最大世代数や探索点数など他の条件の変化に対する適切なパラメータの変化を評価し、パラメータに関するより詳細な議論を行う必要がある。本研究では5目的までの多目的最適化問題を用いて数値実験を行ったが、現実にはさらに多くの目的数を有する多目的最適化問題が存在する。5目的以上の多目的最適化問題を対象とした提案手法の性能の検証は今後の課題である。

6.2 優越関係に基づく手法による優良解集合探索手法のまとめと今後の課題

本研究では、単一目的最適化における事故や技術的課題に直面した際の代替案の提示、多目的最適化における「見た目の良さ」など主観に基づく評価あるいは計算負荷の観点から直接考慮することが困難な目的の間接的考慮、に対してニーズが存在する点に着目し、これらのニーズに対応可能な優良解集合探索問題を効率的に解くための優良解集合探索手法の提案を行った。本研究の着眼点は以下のとおりである。

- 優良解集合探索問題では複数の局所的最適解を求めることが要求される。多点探索型の発見的近似解法は複数の探索点により探索を行うため、多点探索型の発見的近似解法に基づく優良解集合探索手法の構築が行えれば、一度の探索で複数の優良解を獲得することが期待できる。
- 優良解集合探索問題は多目的最適化問題の類似の問題として定式化される。多目的最適化における優越関係に基づく手法は優越関係を用いて探索点の順位付けを行うことで、探索点をパレートフロンティアへと収束させる。優良解集合とパレート解の類似性を活用することで、優越関係に基づく多目的最適化手法と同様に探索点を優良解集合へと収束させる選択戦略の構築が期待できる。

上記の着眼点に基づき、優越関係に基づく多目的最適化手法と同様の選択操作を用いる最も基礎的な優良解集合探索手法を提案した。提案した手法は優良解集合の定義を探索に活用する点において先行研究と異なっている。基礎的な数値実験を通じて、提案手法は優良解集合を定めるパラメータの変化に応じて収束する局所解が変化する性質を有することを示した。

本研究では1つの2次元のベンチマーク問題を用いた実験のみを行った。より高次元の問題や、多数の局所解を有する問題など、より多くの条件で提案手法の特性を評価する必要がある。また、優良解集合探索手法の探索性能の評価指標やベンチマーク問題の提案なども優良解集合探索手法の評価を行うために必要となる。優良解集合探索問題の定式化も検討の余地があると考ええる。優良解集合探索問題と本研究で提案した優良解集合探索手法は密接に結びついており、問題と手法の双方に着目した研究を行うこと

で、実応用上のニーズに応じた最適化手法の発展が期待できる。今回用いたアプローチは、これまでに提案されてきた優越関係に基づく多目的最適化手法のすべてに対して適用できる。本研究では最も基本的な1手法の検討に終わったが、他の優越関係に基づく多目的最適化手法の優良解集合探索問題への適用は今後の課題である。

参考文献

- [1] 加藤政一：「電力システム運用における最適化技術」，電気学会 電力・エネルギー部門誌，Vol.121，No.2，pp.160-163（2001-2）
- [2] 崎川修一郎・佐藤達広・森田豊久・大田健二：「運転整理知識を活用した制約プログラミングによる整理案作成方式」，電気学会 電子・情報・システム部門誌，Vol.130，No.2，pp.332-342（2010-2）
- [3] 大山聖・小平剛央・鈿持寛正・立川智章・渡辺毅：「スーパーコンピュータ「京」を用いた複数車種の車両構造同時設計最適化」，日本機械学会，第28回計算力学講演会，208（2015-10）
- [4] 大林茂：「航空機空力設計における多目的最適化」，システム/制御/情報，Vol.47，No.6，pp.253-258（2003）
- [5] 安田 恵一郎：「メタヒューリスティクスの現在と未来」，計測と制御，Vol.47，No.6，pp.453-458（2008）
- [6] 渡邊真也・湊亮二郎：「多数非劣解集合からの設計支援手法の開発 ジェットエンジン最適化を通して」，人工知能学会論文誌，Vol.24，No.1，pp.1-12（2009-1）
- [7] C. A. C. Coello, G. B. Lamont, and D. A. Van Veldhuizen: Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems 2nd ed., Springer (2007)
- [8] 安田 恵一郎・相吉英太郎 編著：「メタヒューリスティクスと応用」，電気学会，オーム社（2007）

- [9] T. Wagner, N. Beume, and B. Naujoks: “Pareto-, Aggregation-, and Indicator-Based Methods in Many-Objective Optimization”, Proc. of 4th International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Lecture Notes in Computer Science, Vol.4403, pp.742-756 (2007-3)
- [10] H. Ishibuchi, N. Tsukamoto, and Y. Nojima: “Evolutionary Many-Objective Optimization: A Short Review”, Proc. of the 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation, pp.2424-2431 (2008-6)
- [11] M. Preuss, P. Burelli, and G. N. Yannakakis: “Diversified Virtual Camera Composition”, In Proceedings of European Conference on the Applications of Evolutionary Computation, EvoApplications 2012, Lecture Notes in Computer Science, Vol.7248, pp.265-274 (2012-4)
- [12] 大隅 竜太・熊谷 渉・田村 健一・安田 恵一郎:「単一目的最適化における優良解集合探索問題と Firefly Algorithm に基づく解法」, 電気学会 電子・情報・システム部門誌, Vol.136, No.10, pp.1497-1498 (2016-10)
- [13] 小平剛央・天野浩平:「複合領域最適化とトレードオフ分析による車体構造の軽量化に向けた設計知見の抽出」, 電気学会 電子・情報・システム部門誌, Vol.134, No.9, pp.1348-1354 (2014-9)
- [14] 黒岩正・古川亮・大富浩一:「多目的最適化の製品開発上流段階への適用」, 日本機械学会設計工学・システム部門講演会講演論文集, pp.106-107 (2003-10)
- [15] 杉村和之・北村正司:「知的モノづくりを実現する最適設計技術」, 日立評論, Vol.90, No.11, pp.50-53 (2008-11)
- [16] 嘉藤太河・下山幸治・江原由希子・山田想・國領喬:「冬季のスマートホームシステムにおける mCHP と EV の最適制御に関する研究」, 進化計算学会 シンポジウム 2015, pp.270-277 (2015-12)
- [17] 吉見真聡・西本要・廣安知之・三木光範:「球面 SOM によるパレート解集合の可視化の検討-ディーゼルエンジン設計問題における事例の検討」, 情報処理学会論

- 文誌数理モデル化と応用, Vol. 3, No.3, pp.166-174 (2010-10)
- [18] 横野泰之・黒岩正・古川亮・向井稔:「多目的最適化によるパワーユニット設計の可視化」, 可視化情報学会論文集, Vol.24, No.10, pp.49-54 (2004-10)
- [19] 岡本卓・花岡祐也・相吉英太郎・小林容子:「満足化トレードオフ法と SOM を用いた放射性廃棄物地層処分における緩衝材最適設計」, 電気学会 電子・情報・システム部門誌, Vol.132, No.7, pp.1116-1127 (2012)
- [20] J. Knowles, and D. Corne: “On Metrics for Comparing Nondominated Sets”, Proc. of 2002 IEEE Congress on Evolutionary Computation, pp.711-716 (2008-6)
- [21] E. Zitzler: “Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications”, Ph. D thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich (1999)
- [22] 渡辺真也・廣安知之・三木光範:「近傍培養型遺伝的アルゴリズムによる多目的最適化」, 情報処理学会論文誌, Vol.43, No.SIG 10 (TOM 7), pp.183-198 (2002-11)
- [23] E. Zitzler, and L. Thiele: “Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach”, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol.3, No.4, pp.257-271 (1999-11)
- [24] H. Li, and Q. Zhang: “Multiobjective Optimization Problems With Complicated Pareto Sets, MOEA/D and NSGA-II”, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol.13, No.2, pp.284-302 (2009-4)
- [25] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan: “A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II”, IEEE Trans. on Evolutionary Computation, Vol.6, No.2, pp.182-197 (2002-4)
- [26] E. Zitzler, M. Laumanns, and L. Thiele: “SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm”, Technical Report 103, Computer Engineering

- and Networks Laboratory (TIK), Department of Electrical Engineering, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich (2001-5)
- [27] 中山弘隆・谷野哲三：「多目的計画法の理論と応用」，コロナ社（1994）
- [28] Q. Zhang, and H. Li: “MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition”, IEEE Trans. on Evolutionary Computation, Vol.11, No.6, pp.712-731 (2007-12)
- [29] E. Zitzler, and S. Künzli: “Indicator-Based Selection in Multiobjective Search”, Proc. of the 8th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, Lecture Notes in Computer Science, Vol.3242, pp.832-842 (2004-9)
- [30] N. Beume, B. Naujoks, and M. Emmerich: “SMS-EMOA: Multiobjective Selection Based on Dominated Hypervolume”, European Journal of Operational Research, Vol.181, No.3, pp.1653-1669 (2007)
- [31] K. Deb, and H. Jain: “An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems with Box Constraints”, IEEE Trans. on Evolutionary Computation, Vol.18, No.4, pp.577-601 (2014-8)
- [32] 増田 広行・能島 裕介・石渕 久生：「パレートフロントの形状を指定した多目的最適化テスト問題」，進化計算学会 進化計算シンポジウム 2015, pp.33-40 (2015-12)
- [33] Q. Yutao, M. Xiaoliang, L. Fang, J. Licheng, S. Jianyong, and W. Jianshe: “MOEA/D with Adaptive Weight Adjustment”, Evolutionary Computation, Vol.22, No.2, pp.231-264 (2014-5)
- [34] C. M. Fonseca, L. Paquete, and M. López-Ibáñez: “ An Improved Dimension-sweep Algorithm for the Hypervolume Indicator”, Proc. of the 2006 Congress on Evolutionary Computation, pp.1157-1163 (2006-7)
- [35] D. Karaboga: “An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimiza-

- tion”, Technical Report TR06, Computer Engineering Department, Engineering Faculty, Erciyes University (2005)
- [36] 濱田直希・田中雅晴・佐久間淳・小林重信・小野功：「機能分担多目的実数値 GA: FS-MOGA の提案」, 人工知能学会論文誌, Vol.24, No.1, pp.116-126 (2009-1)
- [37] H. Ishibuchi, T. Doi, and Y. Nojima: “Incorporation of Scalarizing Fitness Functions into Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms”, Proc. of the 9th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, Lecture Notes in Computer Science, Vol.4193, pp.493-502 (2006-9)
- [38] 山中弘隆・岡部達哉・荒川雅生・尹禮分：「多目的最適化と光学設計-しなやかシステム工学アプローチ-」, 現代図書, 星雲社 (2007)
- [39] S. Huband, P. Hingston, L. Barone, and L. While: “A Review of Multiobjective Test Problems and a Scalable Test Problem Toolkit”, IEEE Trans. on Evolutionary Computation, Vol.10, No.5, pp.477-506 (2006-10)
- [40] K. Deb, and R. B. Agrawal: “Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space”, Complex Systems, Vol.9, No.2, pp.115-148 (1995)
- [41] I. Das, and J. E. Dennis: “Normal-Boundary Intersection: A New Method for Generating the Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems”, SIAM Journal on Optimization, Vol.8, No.3, pp.631-657 (1998-8)
- [42] 濱田直希・永田裕一・小林重信・小野 功：「被覆度を考慮したマルチスタート法による多目的連続関数最適化：Adaptive Weighted Aggregation」, 進化計算学会論文誌, Vol.3, No.2, pp.31-46 (2012)
- [43] G. Singh and K. Deb: “Comparison of Multi-Modal Optimization Algorithms Based on Evolutionary Algorithms”, Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO '06), pp.1305-1312 (2006-7)
- [44] M. G. Epitropakis, X. Li, and E. K. Burke: “A Dynamic Archive Niching Differ-

- ential Evolution Algorithm for Multimodal Optimization”, Proceedings of 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation, pp.79-86 (2013-6)
- [45] Kanpur Genetic Algorithms Laboratory
<http://www.iitk.ac.in/kangal/index.shtml> (2016 年 12 月 8 日アクセス)
- [46] R. Thomsen: “Multimodal Optimization Using Crowding-based Differential Evolution”, Proceedings of 2004 IEEE Congress on Evolutionary Computation, pp.1382-1389 (2004-6)
- [47] 石原義之・高倉晋司・阿部隆夫・高原真一郎:「多目的最適化を用いた生産ラインにおける HDD 制御パラメータの自動調整手法」, 日本機械学会第 11 回最適化シンポジウム講演論文集, 1215 (2014-12)

著者の研究業績

国内外の学術雑誌への研究論文の発表

- [48] 森田聖惇・高村秋平・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎:「探索機能分担に基づく多目的 Artificial Bee Colony Algorithm の基礎検討」, 電気学会 電子・情報・システム部門誌, Vol.135, No.12, pp.1598-1599 (2015-12)【査読有】
- [49] 森田聖惇・田村健一・安田恵一郎:「機能分担に基づく多目的最適化手法」, 電気学会 電子・情報・システム部門誌 (掲載決定)【査読有】

国際会議発表論文

- [50] S. Morita, K. Tamura, and K. Yasuda: “Functional Specialization Based Search Strategy for Multi-objective Optimization,” 2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, pp.1016-1021 (2016-10)【査読有】

国内会議発表論文

- [51] 森田聖惇・田村健一・安田恵一郎：「Artificial Bee Colony Algorithm に立脚した多目的最適化手法の一検討」，平成 27 年 電気学会全国大会，3-062，pp.87-88 (2015-3)【査読無】＜電気学会 優秀論文発表賞 受賞＞
- [52] 森田聖惇・田村健一・安田恵一郎：「Artificial Bee Colony Algorithm の解析に基づく多目的最適化手法の一検討」，平成 27 年 電気学会 電子・情報・システム部門大会，GS3-1，pp.1117-1122 (2015-8)【査読無】
- [53] 森田聖惇・田村健一・安田恵一郎：「機能分担に基づく進化型多目的最適化手法の基礎検討」，進化計算学会 進化計算シンポジウム 2015，pp.325-332 (2015-12)【査読無】
- [54] 森田聖惇・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎：「機能分担に基づく多目的最適化手法に関する一検討」，平成 28 年 電気学会 全国大会，3-029，pp.40-41 (2016-3)【査読無】
- [55] S. Morita, K. Tamura, J. Tsuchiya, and K. Yasuda: “A Multi-objective Optimization Method Based on Functional Specialization,” 2016 IEEEJ Conference on Electronics, Information and Systems, SS1-2, pp.1380-1381 (2016-8)【査読無】
- [56] 森田聖惇・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎：「進化型多目的最適化のための機能分担に基づく探索戦略」，進化計算学会 進化計算シンポジウム 2016，P2-19，pp.263-270 (2016-12)【査読無】
- [57] 森田聖惇・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎：「優良解集合探索問題の解析と優良解集合探索手法の基礎 検討」，進化計算学会 進化計算シンポジウム 2016，P3-11，pp.348-354 (2016-12)【査読無】

受賞

- [58] 電気学会東京支部「電気学術奨励賞」受賞 (2015-3)

[59] 電気学会「優秀論文発表賞」受賞

受賞論文：「Artificial Bee Colony Algorithm に立脚した多目的最適化手法の一検討」【上記 51】

受賞日：平成 28 年 3 月 17 日

謝辞

本論文は、著者が首都大学東京大学院 理工学研究科 博士前期課程において、首都大学東京大学院 理工学研究科 電気電子工学専攻 安田 恵一郎 教授の指導の下で行った多目的最適化手法に関する研究成果である。

本研究の遂行および本論文の作成にあたり、日頃からご指導頂いている安田恵一郎先生をはじめ、助教 田村健一先生、土屋淳一先生、システム制御工学研究室の方々には、多くの御指導、御助言を頂きました。心より御礼申し上げます。



多目的最適化の 応用研究

A.1 2 目的最適化問題

- 多目的最適化を用いた生産ラインにおける HDD 制御パラメータの自動調整手法 [47]

多目的最適化を用いて HDD の磁気ヘッドの位置決め制御のためのフィルタのパラメータ自動調整を行っている。 f_1 : ゲイン余裕基準線からのはみ出し量の最小化, f_2 : 規範フィルタ特性からの誤差の最小化, の 2 目的最適化問題について, 生産ライン上で HDD の MPU を用いて解くことで, 多段ノッチフィルタのパラメータを自動調整している。本研究は意思決定のための知見抽出を目的としたものではない。

- 知的モノづくりを実現する最適設計技術 [15]

日立製作所の最適設計技術の活用例として掃除機用ファンの最適設計問題を取り上げている。掃除機用ファンの設計問題を f_1 : 効率, f_2 : 動作安定性 (流れの一様性), の 2 目的最適化問題として定式化している。

- 冬季のスマートホームシステムにおける mCHP と EV の最適制御に関する研究 [16]

東北大学と本田技術研究所のスマートホームシステムの最適制御のための研究であり, 家庭用コージェネレーションシステムと電気自動車の運用計画について f_1 : 光熱費, f_2 : 二酸化炭素排出量, の 2 目的最適化問題として定式化している。

得られた解集合から SOM を用いた知見抽出を行っている。

A.2 3 目的最適化問題

- スーパーコンピュータ「京」を用いた複数車種の車両構造同時設計最適化[3]
マツダによる複数車種の車両構造同時設計最適化であり、 f_1 ：車両構造重量最小化、 f_2 ：共通部品数の最大化 (1)、 f_3 ：共通部品数の最大化 (2)、の 3 目的最適化問題をスーパーコンピュータ「京」を用いた衝突性能評価などを通じて最適化している。また、設計のための知見の抽出を行っている。
- 球面 SOM によるパレート解集合の可視化の検討-ディーゼルエンジン設計問題における事例の検討[17]
ディーゼルエンジンの燃料噴射スケジューリング問題を f_1 ：燃料消費量、 f_2 ：窒素酸化物の排出量、 f_3 ：すすの排出量、の 3 目的最適化問題として定式化し、球面 SOM を用いたパレート解集合の可視化について検討している。
- 多目的最適化の製品開発上流段階への適用[14]
プラントのプロトシステムの設計に多目的最適化を適用している。設計問題を f_1 ：小型化、 f_2 ：高出力化、 f_3 ：高効率化、の 3 目的最適化問題として定式化し、パレート解からの設計のための知見の抽出を行っている。また、多目的最適化を製品開発の上流工程に適用することでどのように設計者の支援が可能かについて述べている。

A.3 4 目的以上の最適化問題

- 航空機空力設計における多目的最適化[4]
この研究では、超音速旅客機の主翼の設計問題を f_1 ：遷音速巡航の抵抗係数、 f_2 ：超音速巡航の抵抗係数、 f_3 ：超音速巡航時の翼根にかかる曲げモーメント、 f_4 翼先端にかかる捻りモーメント、の 4 目的最適化問題として定式化している。

- 多目的最適化によるパワーユニット設計の可視化[18]

産業用パワーユニットの設計問題を、 f_1 ：はんだ層の相当ひずみ、 f_2 ：熱抵抗、 f_3 ：圧力損失、 f_4 ：流速、 f_5 ：フィンの高さ、の5目的最適化問題として定式化している。進化型多目的最適化手法によって獲得された解集合を可視化し、設計のための知見の抽出を行っている。

- 満足化トレードオフ法と SOM を用いた放射性廃棄物地層処分における緩衝材最適設計[19]

この研究では、高レベル放射性廃棄物の地層処分のための緩衝材最適設計問題を、 f_1 ：ペクレ数、 f_2 ：一軸圧縮強度（応力緩衝性）、 f_3 ：緩衝材最高温度（熱伝導性）、 f_4 ：緩衝材外側の核種放出（核種移行遅延特性）、 f_5 ：膨張応力（自己シール性）、 f_6 ：緩衝材体積、 f_7 ：材料費、の7目的最適化問題として定式化している。この研究では進化型多目的最適化ではなく、満足化トレードオフ法を用いて対話的に最適化を行っている。

- 多数非劣解集合からの設計支援手法の開発 ジェットエンジン最適化を通して [6]

多目的最適化によって得られた解集合から設計上の知見を抽出ことの重要性を指摘し、そのための方法を提案している。小型超音速機用反転軸流ファンターボジェットエンジンの設計問題を f_1 ：単位ファン断面積当たりの推量、 f_2 ：ファンの拡散係数 (1)、 f_3 ：ファンの拡散係数 (2)、 f_4 ：二段ファンのピッチ円直径位置における空力負荷係数、 f_5 ：二段ファンのチップ直径位置における空力負荷係数、 f_6 ：タービンの相対流入角 (1)、 f_7 ：タービンの相対流入角 (2)、の7目的最適化問題として定式化している。

B

代表的な スカラー化関数

B.1 荷重和

荷重和（Weighted Sum）[7]は最も基本的なスカラー化関数の1つであり，次式で与えられる。

$$S_{WS}(\mathbf{f}|\mathbf{w}, \mathbf{z}^{nad}) = \sum_{k=1}^r w_k (z_k^{nad} - f_k) \quad (\text{B.1})$$

荷重和は，凸なパレートフロンティアではパレートフロンティア全域のパレート解を獲得できるが，非凸なパレートフロンティアではパレート解を得られない領域が存在する。荷重和の等高線と獲得されるパレート解を図 B.1 に示す。

B.2 重み付けチェビシェフノルム

重み付けチェビシェフノルム（Weighted Tchebycheff Norm）[27]は分割に基づくアプローチで最も頻繁に利用されるスカラー化関数の1つである。重み付けチェビシェフノルムによって得られる解は弱パレート解である（弱パレート解の存在しない問題であればパレート解が獲得される）。重み付けチェビシェフノルムは，弱パレート解の存

在しない条件下でパレートフロンティア全域のパレート解を獲得できる[27]。重み付けチェビシェフノルムは次式で与えられる。

$$S_{TCH}(\mathbf{f}|\mathbf{w}, \mathbf{z}^{id}) = \max_k \{w_k \times (f_k - z_k)\} \quad (\text{B.2})$$

重み付けチェビシェフノルムでは、重みベクトル $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_r]$ に対して $[\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_r}]$ 方向のパレート解が獲得される。重み付けチェビシェフノルムの等高線と獲得されるパレート解を図 B.2 に示す。

B.3 Penalty-based Boundary Intersection

Penalty-based Boundary Intersection (PBI) [28]は Zhang らによって提案されたスカラー化関数である。理想点からの水平距離と垂直距離に基づいており、水平距離 d_1 にペナルティとして垂直距離 d_2 を加算する。

$$S_{PBI}(\mathbf{f}|\mathbf{w}, \mathbf{z}^{id}) = d_1 + \theta d_2 \quad (\text{B.3})$$

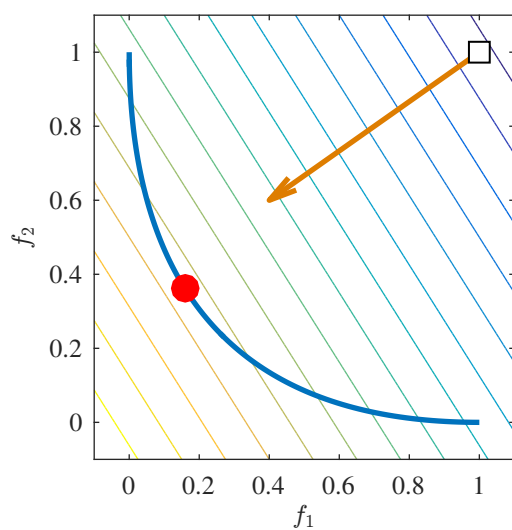
$$d_1 = \frac{\|(\mathbf{f} - \mathbf{z}^{id})^T \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|} \quad (\text{B.4})$$

$$d_2 = \|\mathbf{f} - (\mathbf{z}^{id} + d_1 \mathbf{w})\| \quad (\text{B.5})$$

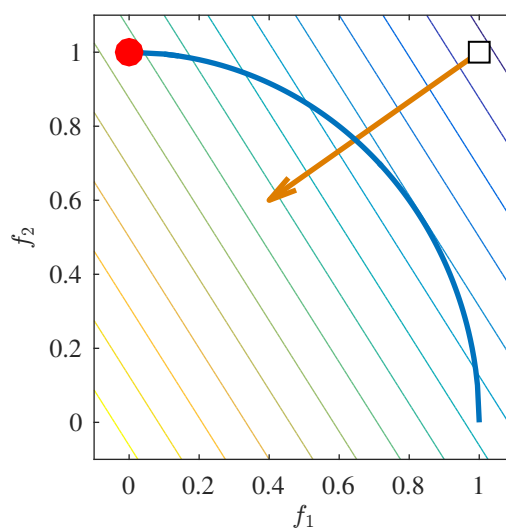
上式は文献[28]に記載されている式であるが、垂直距離の計算に誤りがあると考えられる。次式の d'_2 のように修正を行うことで、図 B.3 のような等高線となる。

$$d'_2 = \|\mathbf{f} - (\mathbf{z}^{id} + d_1 \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|})\| \quad (\text{B.6})$$

図 B.3(b) に示すように、 θ が小さい場合に凸のパレートフロンティアに対して境界付近のパレート解が獲得できないことが指摘されている[31]。

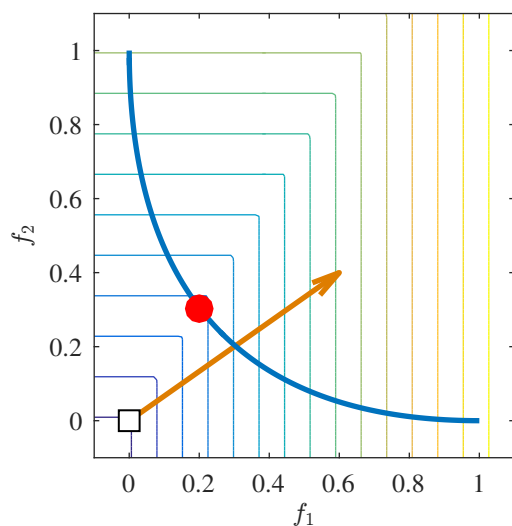


(a) 凸なパレートフロンティア

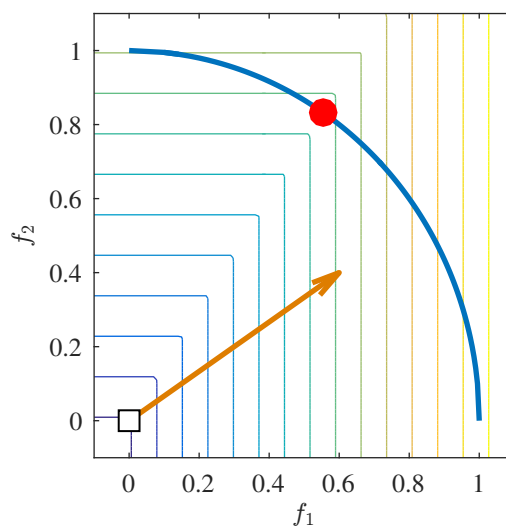


(b) 非凸なパレートフロンティア

図 B.1 荷重和の等高線と獲得されるパレート解 (□は最悪点, ●は獲得されるパレート解を示す。 $w = [0.6 \ 0.4]$ としている。)

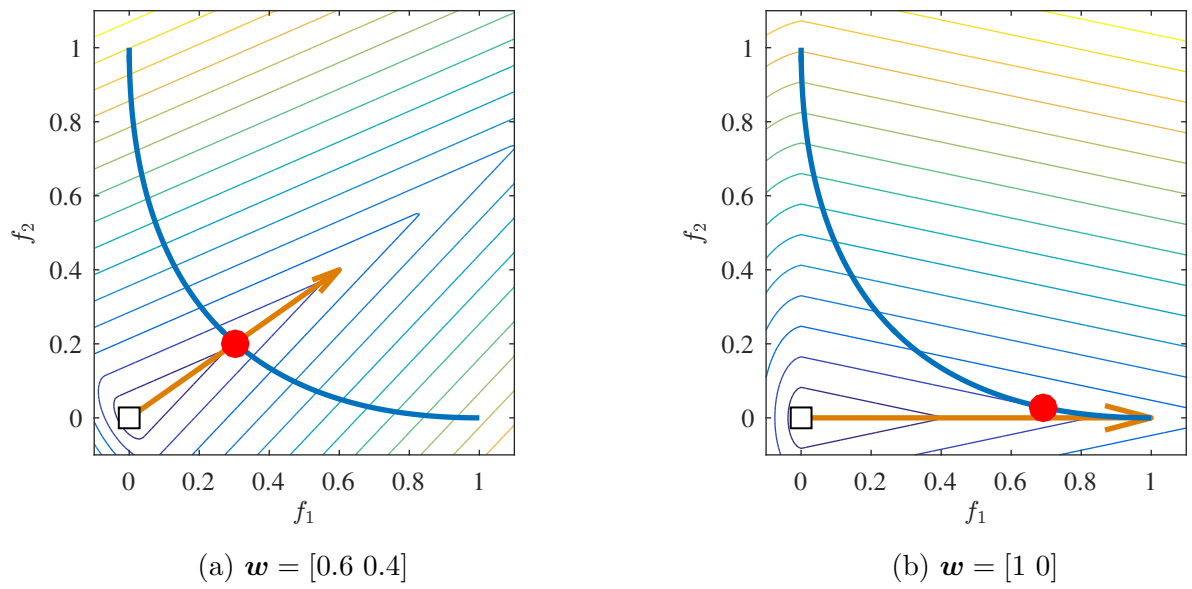


(a) 凸なパレートフロンティア



(b) 非凸なパレートフロンティア

図 B.2 重み付けチェビシェフノルムの等高線とパレート解 (□は理想点, ●は獲得されるパレート解を示す。 $w = [0.6 \ 0.4]$ としている。)



図B.3 PBIの等高線とパレート解（□は理想点，●は獲得されるパレート解を示す。 $\theta = 5$ としている。）



本論文で用いた ベンチマーク問題

C.1 WFG

WFG [39]は，パレートフロンティアが明らかな問題であり，決定変数の次元数，目的数のみならず，パレートフロンティアへの収束の容易さやパレートフロンティアの被覆の容易さを変更可能なベンチマーク問題集である。WFG1-WFG9の9個の問題が提案されている。

2目的以上では， $\sum_{k=1}^r f_k = 1$ なる超平面を変形したパレートフロンティアとなるため，本論文では2目的に限定して使用した。WFG4およびWFG7の形状関数は通常 concave であるが，本研究では concave および convex/mixed ($\alpha = 1, A = 5$)でも使用した。通常は目的関数のスケールを指定するパラメータは $\mathbf{S} = [2, 4, \dots, 2M]$ であるが，本研究では評価を容易にするために， $\mathbf{S} = [1, \dots, 1]$ として使用した。

WFG4 および WFG7 の計算に用いる関数は Algorithm C.1 に示す。形状関数を concave, convex, convex/mixed とした時のパレートフロンティアを図 C.1 に示す。

WFG4

$$\mathbf{y} = [\frac{z_1}{2}, \frac{z_2}{4}, \dots, \frac{z_n}{2n}] \quad (\text{C.1})$$

$$t_{i=1:n}^1 = s_multi(y_i, 30, 10, 0.35) \quad (\text{C.2})$$

$$t_{i=1:M-1}^2 = r_sum([t_{(i-1)k/(M-1)+1}^1, \dots, t_{ik/(M-1)}^1], [1 \dots, 1]) \quad (\text{C.3})$$

$$t_M^2 = r_sum([t_{k+1}^1, \dots, t_n^1], [1, \dots, 1]) \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{x} = Calc_x(\mathbf{t}^2, [1, \dots, 1]) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{h} = concave([x_1, \dots, x_{M-1}]) \quad (\text{C.6})$$

$$f_{i=1:M}(\mathbf{x}) = x_M + S_i h_i \quad (\text{C.7})$$

WFG7

$$\mathbf{y} = [\frac{z_1}{2}, \frac{z_2}{4}, \dots, \frac{z_n}{2n}] \quad (\text{C.8})$$

$$t_{i=1:k}^1 = b_param(y_i, r_sum([y_{i+1}, \dots, y_n], [1, \dots, 1]), \frac{0.98}{49.98}, 0.02, 50) \quad (\text{C.9})$$

$$t_{i=k+1:n}^1 = y_i \quad (\text{C.10})$$

$$t_{i=1:k}^2 = t_i^1 \quad (\text{C.11})$$

$$t_{i=k+1:n}^2 = s_liner(t_i^1, 0.35) \quad (\text{C.12})$$

$$t_{i=1:M-1}^3 = r_sum([t_{(i-1)k/(M-1)+1}^2, \dots, t_{ik/(M-1)}^2], [1 \dots, 1]) \quad (\text{C.13})$$

$$t_M^3 = r_sum([t_{k+1}^2, \dots, t_n^2], [1, \dots, 1]) \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{x} = Calc_x(\mathbf{t}^2, [1, \dots, 1]) \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{h} = concave([x_1, \dots, x_{M-1}]) \quad (\text{C.16})$$

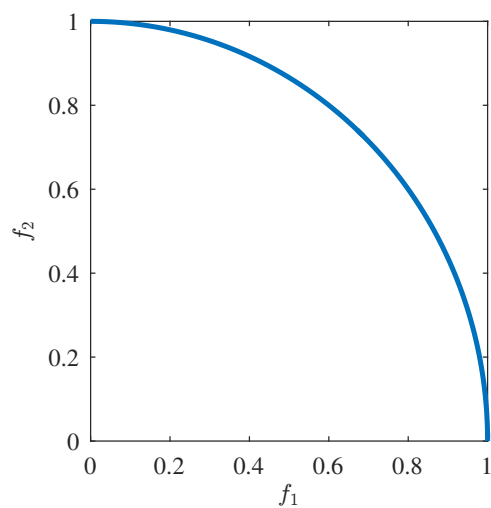
$$f_{i=1:M}(\mathbf{x}) = x_M + S_i h_i \quad (\text{C.17})$$

Algorithm C.1: WFG Function

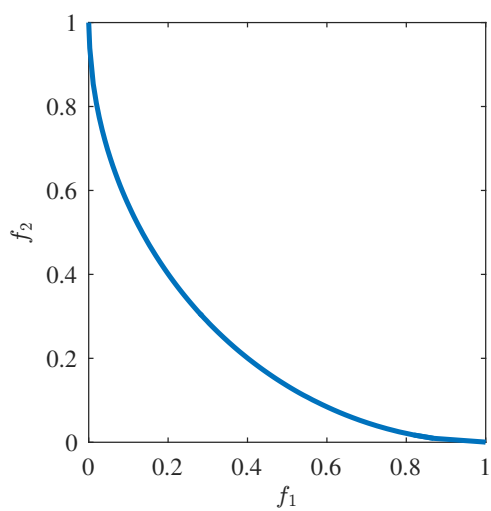
```

1: procedure CONCAVE( $\mathbf{x}$ )
2:    $h_1 = \prod_{i=1}^{M-1} \sin(\frac{x_i \pi}{2})$ 
3:    $h_{m=2:M-1} = (\prod_{i=1}^{M-m} \sin(\frac{x_i \pi}{2})) \cos(\frac{x_{M-m+1} \pi}{2})$ 
4:    $h_M = \cos(\frac{x_1 \pi}{2})$ 
5:   return  $\mathbf{h}$ 
6: end procedure
7: procedure CONVEX( $\mathbf{x}$ )
8:    $h_1 = \prod_{i=1}^{M-1} (1 - \cos(\frac{x_i \pi}{2}))$ 
9:    $h_{m=2:M-1} = (\prod_{i=1}^{M-m} (1 - \cos(\frac{x_i \pi}{2}))) (1 - \sin(\frac{x_{M-m+1} \pi}{2}))$ 
10:   $h_M = 1 - \sin(\frac{x_1 \pi}{2})$ 
11:  return  $\mathbf{h}$ 
12: end procedure
13: procedure CONVEX/MIXED( $\mathbf{x}, A, \alpha$ )
14:   $h_1 = \prod_{i=1}^{M-1} (1 - \cos(\frac{x_i \pi}{2}))$ 
15:   $h_{m=2:M-1} = (\prod_{i=1}^{M-m} (1 - \cos(\frac{x_i \pi}{2}))) (1 - \sin(\frac{x_{M-m+1} \pi}{2}))$ 
16:   $h_M = (1 - x_1 - \frac{\cos(2A\pi x_1 + \pi/2)}{2A\pi})^\alpha$ 
17:  return  $\mathbf{h}$ 
18: end procedure
19: procedure S_MULTI( $y, A, B, C$ )
20:   $y' = \frac{1 + \cos[(4A+2)\pi(0.5 - \frac{\lfloor y-C \rfloor}{2(\lfloor C-y \rfloor + C)})] + 4B(\frac{\lfloor y-C \rfloor}{2(\lfloor C-y \rfloor + C)})^2}{B+2}$ 
21:  return  $y'$ 
22: end procedure
23: procedure S_LINEAR( $y, A$ )
24:   $y' = \frac{|y-A|}{\lfloor A-y \rfloor + A}$ 
25:  return  $y'$ 
26: end procedure
27: procedure R_SUM( $\mathbf{y}, \mathbf{w}$ )
28:   $y' = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor \mathbf{y} \rfloor} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{\lfloor \mathbf{y} \rfloor} w_i}$ 
29:  return  $y'$ 
30: end procedure
31: procedure B_PARAM( $y, u, A, B, C$ )
32:   $v = A - (1 - 2u) \lfloor 0.5 - u \rfloor + A$ 
33:   $y' = y^{B+(C-B)v}$ 
34:  return  $y'$ 
35: end procedure
36: procedure CALC_X( $\mathbf{y}, \mathbf{A}$ )
37:   $\mathbf{x} = [\max(y_M, A_1)(y_1 - 0.5) + 0.5, \dots, \max(y_M, A_{M-1})(y_{M-1} - 0.5) + 0.5, y_M]$ 
38:  return  $\mathbf{x}$ 
39: end procedure

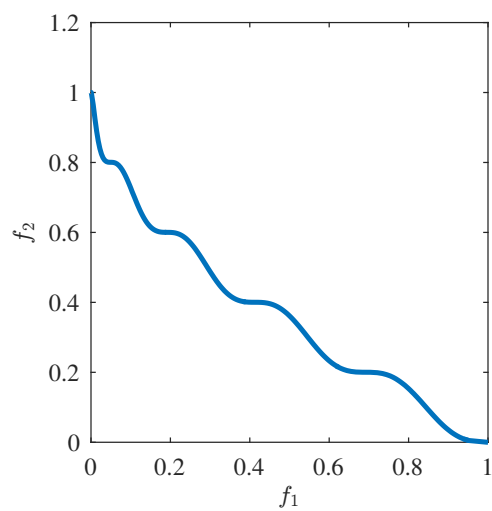
```



(a) concave



(b) convex



(c) convex/mixed

図 C.1 WFG のパレートフロンティア

C.2 MED

MED [42]は濱田らによって提案されたベンチマーク問題である。各目的関数が唯一の大域的最適解を有する問題であることから、比較的実問題に近い性質を有していると考えられる。特に、以下で述べる MED-convex はすべての目的関数が二次関数として記述されることから、最も単純な多目的最適化問題として捉えることができる。MED は決定変数の次元数, 目的数, パレートフロンティアの形状を指定可能である。さらに, パレート解の決定変数空間上の分布も明らかであるなど, ベンチマーク問題として望ましい性質を有している。MED は次式で与えられる。

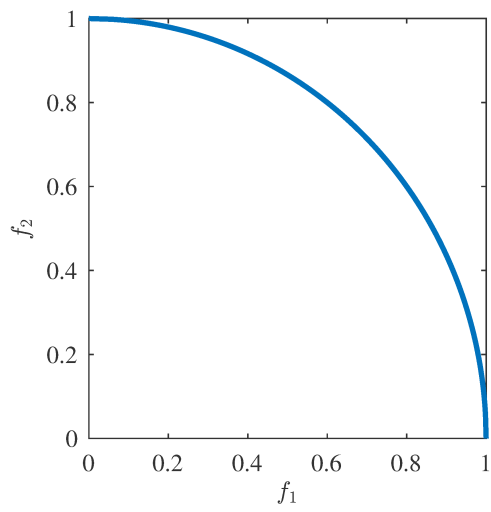
$$f_k(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^*\|\right)^{p_k} \quad (\text{C.18})$$

$$x_{kj}^* = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

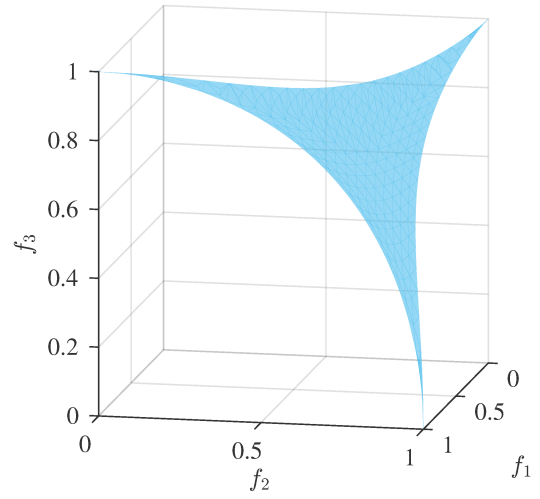
ここで, p_k はパレートフロンティアの凸性を指定するパラメータである。パレート解 \mathbf{x}^* は次の条件で与えられる。

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^r x_k^* = 1 \\ x_j^* = 0 \quad (j = r+1, r+2, \dots, n) \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

オリジナルの MED では $p_k = \exp(2\frac{k-1}{r-1} - 1)$ とすることで, パレートフロンティアに凸な領域と非凸な領域が混在する設定となっている。本論文ではオリジナルの MED を MED-mix とし, $\forall k, p_k = 2$ (凸なパレートフロンティア) としたものを MED-convex, $\forall k, p_k = 0.5$ (非凸なパレートフロンティア) としたものを MED-concave として用いた。MED のパレートフロンティアの概形を図 C.2 から図 C.4 に示す。

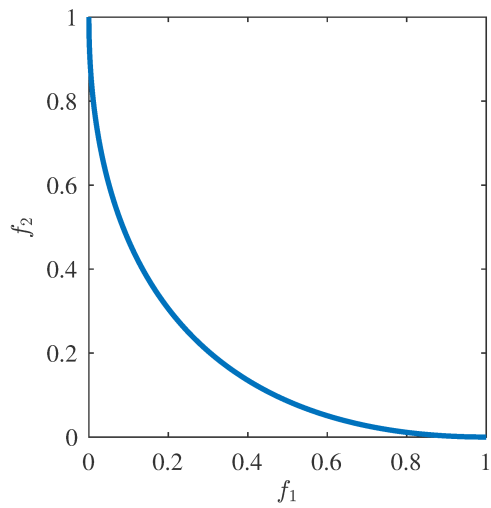


(a) 2 目的

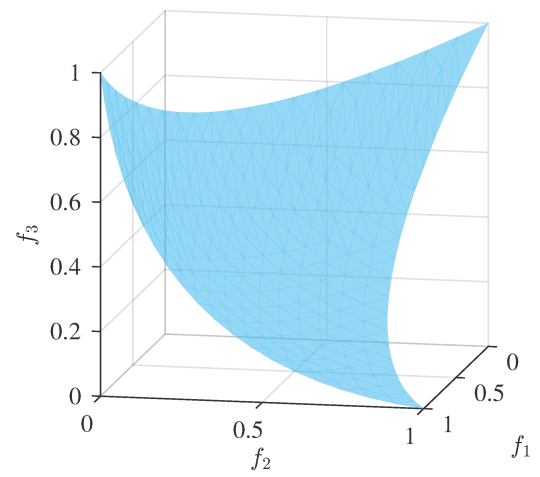


(b) 3 目的

図 C.2 MED-concave のパレートフロンティア

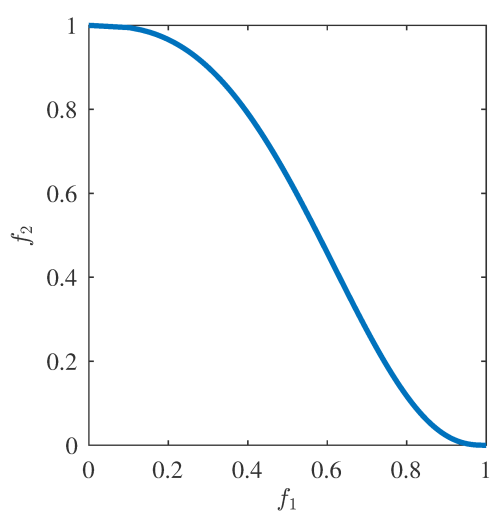


(a) 2 目的

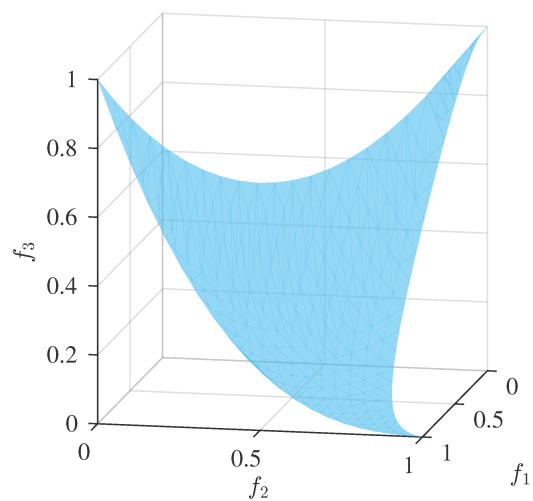


(b) 3 目的

図 C.3 MED-convex のパレートフロンティア



(a) 2 目的



(b) 3 目的

図 C.4 MED-mix のパレートフロンティア



実数値 GA のための 交叉・突然変異

D.1 Simulated Binary Crossover

Simulated Binary Crossover (SBX) [40]は Deb らによって提案された交差法である。実装法は様々であるが、本論文では文献[45]で公開されている `nsga2-gnuplot-v1.1.6` に従い、決定変数の制約条件を考慮した実装としている。SBX のアルゴリズムを Algorithm D.1 および Algorithm D.2 に示した。

D.2 Polynomial Mutation

Polynomial Mutation (PM) [25]も Deb らによって提案された突然変異法である。本研究では SBX 同様、文献[45]で公開されている `nsga2-gnuplot-v1.1.6` に従い、決定変数の制約条件を考慮した実装としている。PM のアルゴリズムを Algorithm D.3 に示した。

Algorithm D.1: Simulated Binary Crossover (1)

```

1: procedure SIMULATED BINARY CROSSOVER(parent1, parent2,  $p_c$ ,  $\eta_c$ ,  $x_l$ ,  $x_u$ )
   %parent1, parent2 : 親個体,  $p_c$  : 交叉率,  $\eta_c$  : 分布パラメータ,
   % $x_l$  : 下限値ベクトル,  $x_u$  : 上限値ベクトル

2:   child1 = child2 = 0                                ▷ 子個体の初期化
3:   if RAND() <  $p_c$  then                                ▷ 交差判定
4:     for  $j = 1, \dots, n$  do                                ▷ 要素ごとに計算
5:       if RAND() < 0.5 then                                ▷ 各要素は  $\frac{1}{2}$  の確率で交叉する
6:         if parent1j = parent2j then                        ▷ 等しいならそのままコピーする
7:           child1j = parent1j
8:           child2j = parent2j
9:         else                                              ▷ 等しくないなら交叉
10:          if parent1j < parent2j then ▷ 小さい方を  $y_1$  に, 大きい方を  $y_2$  にする
11:             $y_1$  = parent1j
12:             $y_2$  = parent2j
13:          else
14:             $y_1$  = parent2j
15:             $y_2$  = parent1j
16:          end if
17:          ( $c_1, c_2$ ) = SBX( $y_1, y_2, x_{lj}, x_{uj}, \eta_c$ ) ▷ Simulated Binary Crossover (2) を参照
18:        end if
19:        if RAND() < 0.5 then                                ▷ ランダムで入れ替える
20:          child1j =  $c_2$ 
21:          child2j =  $c_1$ 
22:        else
23:          child1j =  $c_2$ 
24:          child2j =  $c_1$ 
25:        end if
26:      else                                              ▷ 交差しない要素はそのままコピー
27:        child1j = parent1j
28:        child2j = parent2j
29:      end if
30:    end for
31:  else                                              ▷ 交叉しないならそのままコピー
32:    child1 = parent1
33:    child2 = parent2
34:  end if
35:  return child1, child2
36: end procedure

```

Algorithm D.2: Simulated Binary Crossover (2)

```

1: procedure SBX( $y_1, y_2, p_c, \eta_c, x_l, x_u$ )
2:    $r = \text{RAND}()$ 
3:    $\beta = 1 + 2 * \frac{c_1 - x_{lj}}{y_2 - y_1}$ 
4:    $\alpha = 2 - \beta^{-\eta_c + 1}$ 
5:   if  $r \leq \frac{1}{\alpha}$  then
6:      $\beta_q = (r \times \alpha)^{\frac{1}{\eta_c + 1}}$ 
7:   else
8:      $\beta_q = (\frac{1}{2 - r \times \alpha})^{\frac{1}{\eta_c + 1}}$ 
9:   end if
10:   $c_1 = 0.5((y_1 + y_2) - \beta_q(y_2 - y_1))$ 

11:   $\beta = 1 + 2 * \frac{x_{uj} - y_2}{y_2 - y_1}$ 
12:   $\alpha = 2 - \beta^{-\eta_c + 1}$ 
13:  if  $r \leq \frac{1}{\alpha}$  then
14:     $\beta_q = (r \times \alpha)^{\frac{1}{\eta_c + 1}}$ 
15:  else
16:     $\beta_q = (\frac{1}{2 - r \times \alpha})^{\frac{1}{\eta_c + 1}}$ 
17:  end if
18:   $c_2 = 0.5((y_1 + y_2) - \beta_q(y_2 - y_1))$ 

19:  if  $c_1 < x_l$  then
20:     $c_1 = x_l$ 
21:  end if
22:  if  $c_2 < x_l$  then
23:     $c_2 = x_l$ 
24:  end if
25:  if  $c_1 > x_u$  then
26:     $c_1 = x_u$ 
27:  end if
28:  if  $c_2 > x_u$  then
29:     $c_2 = x_u$ 
30:  end if
31:  return  $child_1, child_2$ 
32: end procedure

```

▷ 境界条件を適用

Algorithm D.3: Polynomial Mutation

```

1: procedure POLYNOMIAL MUTATION(parent,  $p_m$ ,  $\eta_m$ ,  $x_l$ ,  $x_u$ )
   %parent : 親個体,  $p_m$  : 突然変異率,  $\eta_m$  : 分布パラメータ,
   % $x_l$  : 下限値ベクトル,  $x_u$  : 上限値ベクトル
2:   for  $j = 1, \dots, n$  do                                     ▷ 要素ごとに突然変異
3:     if RAND() <  $p_m$  then                                     ▷ 突然変異判定
4:        $y = \text{parent}_j$ 
5:        $\delta_1 = \frac{y - x_{lj}}{x_{uj} - x_{lj}}$ 
6:        $\delta_2 = \frac{x_{uj} - y}{x_{uj} - x_{lj}}$ 
7:        $r = \text{RAND}()$                                            ▷ RAND() は [0 1] の一様乱数
8:       if  $r \leq 0.5$  then
9:          $a = 2r + (1 - 2r) \times (1 - \delta_1)^{\eta_m + 1}$ 
10:         $\delta_q = a^{\frac{1}{\eta_m + 1}} - 1$ 
11:       else
12:         $a = 2(1 - r) + 2(r - 0.5) \times (1 - \delta_2)^{\eta_m + 1}$ 
13:         $\delta_q = 1 - a^{\frac{1}{\eta_m + 1}}$ 
14:       end if
15:        $y = y + \delta_q(x_{uj} - x_{lj})$ 
16:       if  $y < x_{lj}$  then
17:          $y = x_{lj}$ 
18:       end if
19:       if  $y > x_{uj}$  then
20:          $y = x_{uj}$ 
21:       end if
22:        $\text{parent}_j = y$ 
23:     end if
24:   end for
25:   return parent
26: end procedure

```
